Disuguaglianza Isoperimetrica e Teorema di Sobolev

Tesi di Laurea Triennale

Angelo Lucia

Università di Pisa

25 settembre 2009

Indice.

- Presenteremo due risultati classici:
  - Disuguaglianza Isoperimetrica.
  - Disuguaglianza Gagliardo-Nirenberg / Teorema di Sobolev.
- Esiste un'equivalenza, dovuta a V.G. Maz'ja [Maz'ja, 1985], tra le due disuguaglianze.
- L'equivalenza è stretta nel valore delle costanti.
- Forniremo una sintesi della dimostrazione dell'equivalenza.

Indice.

- Presenteremo due risultati classici:
  - Disuguaglianza Isoperimetrica.
  - Disuguaglianza Gagliardo-Nirenberg / Teorema di Sobolev.
- Esiste un'equivalenza, dovuta a V.G. Maz'ja [Maz'ja, 1985], tra le due disuguaglianze.
- L'equivalenza è stretta nel valore delle costanti.
- Forniremo una sintesi della dimostrazione dell'equivalenza.

Indice.

- Presenteremo due risultati classici:
  - Disuguaglianza Isoperimetrica.
  - Disuguaglianza Gagliardo-Nirenberg / Teorema di Sobolev.
- Esiste un'equivalenza, dovuta a V.G. Maz'ja [Maz'ja, 1985], tra le due disuguaglianze.
- L'equivalenza è stretta nel valore delle costanti.
- Forniremo una sintesi della dimostrazione dell'equivalenza.

Indice.

- Presenteremo due risultati classici:
  - Disuguaglianza Isoperimetrica.
  - Disuguaglianza Gagliardo-Nirenberg / Teorema di Sobolev.
- Esiste un'equivalenza, dovuta a V.G. Maz'ja [Maz'ja, 1985], tra le due disuguaglianze.
- L'equivalenza è stretta nel valore delle costanti.
- Forniremo una sintesi della dimostrazione dell'equivalenza.

Indice.

- Presenteremo due risultati classici:
  - Disuguaglianza Isoperimetrica.
  - Disuguaglianza Gagliardo-Nirenberg / Teorema di Sobolev.
- Esiste un'equivalenza, dovuta a V.G. Maz'ja [Maz'ja, 1985], tra le due disuguaglianze.
- L'equivalenza è stretta nel valore delle costanti.
- Forniremo una sintesi della dimostrazione dell'equivalenza.

Indice.

- Presenteremo due risultati classici:
  - Disuguaglianza Isoperimetrica.
  - Disuguaglianza Gagliardo-Nirenberg / Teorema di Sobolev.
- Esiste un'equivalenza, dovuta a V.G. Maz'ja [Maz'ja, 1985], tra le due disuguaglianze.
- L'equivalenza è stretta nel valore delle costanti.
- Forniremo una sintesi della dimostrazione dell'equivalenza.

Caso bidimensionale.

Versione bidimensionale (classica)

Determinare, tra tutte le curve piane chiuse di lunghezza L, quella (se esiste) che racchiude la regione di area massima A.

Teorema

Vale

$$4\pi A \leqslant L^2$$

e si ha l'uguaglianza se e solo se la curva è una circonferenza.

Caso bidimensionale.

Versione bidimensionale (classica)

Determinare, tra tutte le curve piane chiuse di lunghezza L, quella (se esiste) che racchiude la regione di area massima A.

Teorema

Vale

$$4\pi A \leqslant L^2$$

e si ha l'uguaglianza se e solo se la curva è una circonferenza.

Caso generale.

Disuguaglianza Isoperimetrica

Sia $g \subset \mathbb{R}^n$ di classe $C^{0,1}$. Allora vale

$$m_n(g)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant n^{-1}\omega_n^{-1/n} H_{n-1}(\partial g)$$

Spazi di Sobolev.

Definizione

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per } |\alpha| \leqslant m\} \ .$$

Definizione

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/p} .$$

Osservazione

$W^{m,p}(\Omega)$ dotato della norma $\|\cdot\|_{m,p}$ è uno spazio di Banach.

Spazi di Sobolev.

Definizione

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per } |\alpha| \leqslant m\} .$$

Definizione

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/p} .$$

Osservazione

$W^{m,p}(\Omega)$ dotato della norma $\|\cdot\|_{m,p}$ è uno spazio di Banach.

Spazi di Sobolev.

Definizione

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per } |\alpha| \leqslant m\} \ .$$

Definizione

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/p} \ .$$

Osservazione

$W^{m,p}(\Omega)$ dotato della norma $\|\cdot\|_{m,p}$ è uno spazio di Banach.

Teorema di Sobolev.

Proposizione (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg)

$$Se\ 1 \leqslant p < n \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C\,\|\nabla u\|_{p}\ .$$

Teorema (Sobolev)

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)\ per\ 1 \leqslant p < n\,.$$

Una dimostrazione del teorema di Sobolev indipendente dalla disuguaglianza isoperimetrica si può trovare in [Adams, 2003].

Teorema di Sobolev.

Proposizione (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg)

$$Se\ 1 \leqslant p < n \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \|\nabla u\|_p .$$

Teorema (Sobolev)

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)\ per\ 1 \leqslant p < n .$$

Una dimostrazione del teorema di Sobolev indipendente dalla disuguaglianza isoperimetrica si può trovare in [Adams, 2003].

Sottoinsiemi densi di $W^{m,p}$

- In generale le funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto $\mathscr{D}(\Omega)$ non sono dense in $W^{m,p}$.
- È possibile imporre delle condizioni sulla regolarità del bordo di Ω affinché $\mathscr{D}(\Omega)$ sia denso in $W^{m,p}(\Omega)$.
- $\Omega = \mathbb{R}^n$ è una condizione sufficiente. ([AA.VV., 1974] e [Ambrosio, 1997])
- Ω di classe $C^{0,1}$ è una condizione sufficiente. ([Maz'ja, 1985])

In tali casi è sufficiente dimostrare che

Proposizione

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \|\nabla u\|_p \ \ per\ p < n\,.$$

Sottoinsiemi densi di $W^{m,p}$

- In generale le funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto $\mathscr{D}(\Omega)$ non sono dense in $W^{m,p}$.
- È possibile imporre delle condizioni sulla regolarità del bordo di Ω affinché $\mathscr{D}(\Omega)$ sia denso in $W^{m,p}(\Omega)$.
- $\Omega = \mathbb{R}^n$ è una condizione sufficiente. ([AA.VV., 1974] e [Ambrosio, 1997])
- Ω di classe $C^{0,1}$ è una condizione sufficiente. ([Maz'ja, 1985])

In tali casi è sufficiente dimostrare che

Proposizione

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \|\nabla u\|_p \ per\ p < n\,.$$

Sottoinsiemi densi di $W^{m,p}$

- In generale le funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto $\mathscr{D}(\Omega)$ non sono dense in $W^{m,p}$.
- È possibile imporre delle condizioni sulla regolarità del bordo di Ω affinché $\mathscr{D}(\Omega)$ sia denso in $W^{m,p}(\Omega)$.
- $\Omega = \mathbb{R}^n$ è una condizione sufficiente. ([AA.VV., 1974] e [Ambrosio, 1997])
- Ω di classe $C^{0,1}$ è una condizione sufficiente. ([Maz'ja, 1985])

In tali casi è sufficiente dimostrare che

Proposizione

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \|\nabla u\|_p \;\; per\ p < n\,.$$

Sottoinsiemi densi di $W^{m,p}$

- In generale le funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto $\mathscr{D}(\Omega)$ non sono dense in $W^{m,p}$.
- È possibile imporre delle condizioni sulla regolarità del bordo di Ω affinché $\mathscr{D}(\Omega)$ sia denso in $W^{m,p}(\Omega)$.
- $\Omega = \mathbb{R}^n$ è una condizione sufficiente. ([AA.VV., 1974] e [Ambrosio, 1997])
- Ω di classe $C^{0,1}$ è una condizione sufficiente. ([Maz'ja, 1985])

In tali casi è sufficiente dimostrare che

Proposizione

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \|\nabla u\|_p \ \ per\ p < n\,.$$

Sottoinsiemi densi di $W^{m,p}$

- In generale le funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto $\mathscr{D}(\Omega)$ non sono dense in $W^{m,p}$.
- È possibile imporre delle condizioni sulla regolarità del bordo di Ω affinché $\mathscr{D}(\Omega)$ sia denso in $W^{m,p}(\Omega)$.
- $\Omega = \mathbb{R}^n$ è una condizione sufficiente. ([AA.VV., 1974] e [Ambrosio, 1997])
- Ω di classe $C^{0,1}$ è una condizione sufficiente. ([Maz'ja, 1985])

In tali casi è sufficiente dimostrare che

Proposizione

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \|\nabla u\|_p \ \ per\ p < n\,.$$

Sia μ una misura su Ω, e sia $\mathscr{G}$ la classe degli insiemi ammissibili.

Teorema

Dato $1 \leqslant q < \infty$, se

$$\sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} < \infty$$

allora esiste una costante C tale che

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C \, \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$$

e C verifica

$$C \leqslant \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)}.$$

Sia μ una misura su Ω, e sia $\mathscr{G}$ la classe degli insiemi ammissibili.

Teorema

Dato $1 \leqslant q < \infty$, *se*

$$\sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} < \infty$$

allora esiste una costante C *tale che*

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$$

e C *verifica*

$$C \leqslant \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)}.$$

Il teorema di equivalenza.

I

Sia μ una misura su Ω, e sia $\mathscr{G}$ la classe degli insiemi ammissibili.

Teorema

Dato $1 \leqslant q < \infty$, *se*

$$\sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} < \infty$$

allora esiste una costante C *tale che*

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$$

e C *verifica*

$$C \leqslant \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} .$$

Il teorema di equivalenza.
II

Teorema

Se esiste una costante C, e $1 \leqslant q < \infty$, tali che

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C\,\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}\ ;$$

allora

$$\sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C < \infty\,.$$

Il teorema di equivalenza.
II

Teorema

Se esiste una costante C, e $1 \leqslant q < \infty$, tali che

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} ;$$

allora

$$\sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C < \infty .$$

Lemma di Sard.

Definizione

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. L'insieme dei punti in cui si annulla il gradiente di f

$$K_1 = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è detto *insieme critico di* f.

Teorema (lemma di Sard)

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $f \in C^n(\Omega)$, allora $m_1(f(K_1)) = 0$.

Corollario

Se $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, allora per quasi ogni t $u^{-1}(t)$ è una varietà C^∞ compatta.

Lemma di Sard.

Definizione

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. L'insieme dei punti in cui si annulla il gradiente di f

$$K_1 = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è detto *insieme critico di* f.

Teorema (lemma di Sard)

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $f \in C^n(\Omega)$, allora $m_1(f(K_1)) = 0$.

Corollario

Se $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, allora per quasi ogni t $u^{-1}(t)$ è una varietà C^∞ compatta.

Lemma di Sard.

Definizione

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. L'insieme dei punti in cui si annulla il gradiente di f

$$K_1 = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è detto *insieme critico di* f.

Teorema (lemma di Sard)

Sia Ω *aperto di* $\mathbb{R}^n$. *Se* $f \in C^n(\Omega)$, *allora* $m_1(f(K_1)) = 0$.

Corollario

Se $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, *allora per quasi ogni* t $u^{-1}(t)$ *è una varietà* C^∞ *compatta.*

Una rappresentazione dell'integrale di Lebesgue.

Teorema

Sia $(X, \mathscr{B}, \mu)$ *uno spazio dotato di una misura non negativa, e sia* $u : X \to \mathbb{R}$ *una funzione non negativa* μ*-misurabile. Allora*

$$\int_X u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) = \int_0^\infty \mu(\mathscr{M}_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)\,\mathrm{d}t$$

dove

$$\mathscr{M}_t = \{x \in X : u(x) \geqslant t\} \qquad \mathscr{L}_t = \{x \in X : u(x) > t\} \ .$$

Una rappresentazione dell'integrale di Lebesgue.

Teorema

Sia $(X, \mathscr{B}, \mu)$ *uno spazio dotato di una misura non negativa, e sia* $u : X \to \mathbb{R}$ *una funzione non negativa* μ*-misurabile. Allora*

$$\int_X u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) = \int_0^\infty \mu(\mathscr{M}_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)\,\mathrm{d}t$$

dove

$$\mathscr{M}_t = \{x \in X : u(x) \geqslant t\} \qquad \mathscr{L}_t = \{x \in X : u(x) > t\} \ .$$

La formula di coarea.

Proposizione (Formula di coarea di Fleming-Rishel)

Se $u \in C^1(\Omega)$, tale che u e $\nabla u \in L^1(\Omega)$, allora

$$\|\nabla u\|_1 = \int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x})| \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^\infty H_{n-1}(\mathscr{N}_t) \,\mathrm{d}t$$

con

$$\mathscr{N}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| = t\} \ .$$

Il teorema di equivalenza.

I

Sia μ una misura su Ω, e sia $\mathscr{G}$ la classe degli insiemi ammissibili.

Teorema

Dato $1 \leqslant q < \infty$, *se*

$$\sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} < \infty$$

allora esiste una costante C *tale che*

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$$

e C *verifica*

$$C \leqslant \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} .$$

Isoperimetrica $\Rightarrow$ Sobolev

$$\mathscr{L}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > t\}$$

1. Lemma di Sard
2. Rapp. integrale di Lebesgue
3. Formula di coarea

Dimostrazione.

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int_{\Omega} |u|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^{\infty} \mu(\mathscr{L}_t) \, \mathrm{d}t^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_0^{\infty} \mu(\mathscr{L}_t)^{\frac{1}{q}} \, \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \int_0^{\infty} H_{n-1}(\partial \mathscr{L}_t) \, \mathrm{d}t = \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \|\nabla u\|_1 \ .$$

$\square$

Isoperimetrica $\Rightarrow$ Sobolev

$$\mathscr{L}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > t\}$$

1. Lemma di Sard
2. Rapp. integrale di Lebesgue
3. Formula di coarea

Dimostrazione.

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)\, \mathrm{d}t^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)^{\frac{1}{q}}\, \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g\in\mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \int_0^\infty H_{n-1}(\partial\mathscr{L}_t)\, \mathrm{d}t = \sup_{g\in\mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \|\nabla u\|_1 \ .$$

$\square$

Isoperimetrica $\Rightarrow$ Sobolev

$$\mathscr{L}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > t\}$$

1. Lemma di Sard
2. Rapp. integrale di Lebesgue
3. Formula di coarea

Dimostrazione.

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t) \, \mathrm{d}t^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)^{\frac{1}{q}} \, \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \int_0^\infty H_{n-1}(\partial \mathscr{L}_t) \, \mathrm{d}t = \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \|\nabla u\|_1 \ .$$

Isoperimetrica $\Rightarrow$ Sobolev

$$\mathscr{L}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > t\}$$

1. Lemma di Sard
2. Rapp. integrale di Lebesgue
3. Formula di coarea

Dimostrazione.

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)\, \mathrm{d}t^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)^{\frac{1}{q}}\, \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \int_0^\infty H_{n-1}(\partial \mathscr{L}_t)\, \mathrm{d}t = \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \|\nabla u\|_1 \ .$$

$\square$

Isoperimetrica $\Rightarrow$ Sobolev

$$\mathscr{L}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > t\}$$

1. Lemma di Sard
2. Rapp. integrale di Lebesgue
3. Formula di coarea

Dimostrazione.

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)\, \mathrm{d}t^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)^{\frac{1}{q}}\, \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g\in\mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \int_0^\infty H_{n-1}(\partial\mathscr{L}_t)\, \mathrm{d}t = \sup_{g\in\mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \|\nabla u\|_1 \ .$$

□

Isoperimetrica $\Rightarrow$ Sobolev

$$\mathscr{L}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > t\}$$

1. Lemma di Sard
2. Rapp. integrale di Lebesgue
3. Formula di coarea

Dimostrazione.

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)\, \mathrm{d}t^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)^{\frac{1}{q}}\, \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \int_0^\infty H_{n-1}(\partial \mathscr{L}_t)\, \mathrm{d}t = \sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \|\nabla u\|_1 \ .$$

$\square$

Il teorema di equivalenza.
II

Teorema

Se esiste una costante C, e $1 \leqslant q < \infty$, tali che

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \;;$$

allora

$$\sup_{g \in \mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C < \infty \,.$$

Sia $g \in \mathscr{G}$ e sia $d(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y} \in g} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Definizione

Sia α_ε tale che

1. $\alpha_\varepsilon \in \mathscr{D}([0,1])$,
2. $\alpha_\varepsilon(0) = 1$, decrescente,
3. $\operatorname{Supp} \alpha_\varepsilon \subset [0, \varepsilon]$.

Definizione

Data α_ε come sopra, definiamo

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \alpha_\varepsilon(d(\mathbf{x})) \in \mathscr{D}(\Omega) .$$

Figura: Esempi di funzioni α al variare di ε.

Sobolev $\Rightarrow$ Isoperimetrica
I

Sia $g \in \mathscr{G}$ e sia $d(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y} \in g} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Definizione

Sia α_ε tale che

1. $\alpha_\varepsilon \in \mathscr{D}([0,1])$,
2. $\alpha_\varepsilon(0) = 1$, decrescente,
3. $\operatorname{Supp} \alpha_\varepsilon \subset [0, \varepsilon]$.

Definizione

Data α_ε come sopra, definiamo

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \alpha_\varepsilon(d(\mathbf{x})) \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Figura: Esempi di funzioni α al variare di ε.

Sia $g \in \mathscr{G}$ e sia $d(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y}\in g} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Definizione

Sia α_ε tale che

1. $\alpha_\varepsilon \in \mathscr{D}([0,1])$,
2. $\alpha_\varepsilon(0) = 1$, decrescente,
3. $\operatorname{Supp} \alpha_\varepsilon \subset [0,\varepsilon]$.

Definizione

Data α_ε come sopra, definiamo

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \alpha_\varepsilon(d(\mathbf{x})) \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

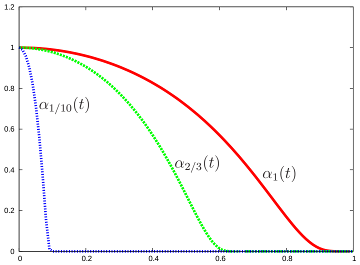

Figura: Esempi di funzioni α al variare di ε.

Sobolev $\Rightarrow$ Isoperimetrica
I

Sia $g \in \mathscr{G}$ e sia $d(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y}\in g} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$.

Definizione

Sia α_ε tale che

1. $\alpha_\varepsilon \in \mathscr{D}([0,1])$,
2. $\alpha_\varepsilon(0) = 1$, decrescente,
3. $\operatorname{Supp} \alpha_\varepsilon \subset [0,\varepsilon]$.

Definizione

Data α_ε come sopra, definiamo

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \alpha_\varepsilon(d(\mathbf{x})) \in \mathscr{D}(\Omega).$$

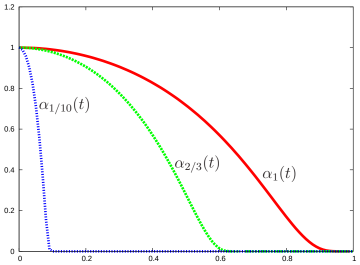

Figura: Esempi di funzioni α al variare di ε.

Sobolev $\Rightarrow$ Isoperimetrica
II

Dimostrazione.

Per ipotesi

$$\|u_\varepsilon(\mathbf{x})\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C \|\nabla u_\varepsilon\|_1 .$$

$$\|u_\varepsilon(\mathbf{x})\|^q_{L^q(\Omega,\mu)} = \int_{\{d<\varepsilon\}} \alpha_\varepsilon(d(\mathbf{x}))^q \,\mathrm{d}\mu(\mathbf{x}) \geqslant \mu(g)$$

Sobolev $\Rightarrow$ Isoperimetrica
II

Dimostrazione.

Per ipotesi

$$\|u_\varepsilon(\mathbf{x})\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_1 \ .$$

$$\|u_\varepsilon(\mathbf{x})\|^q_{L^q(\Omega,\mu)} = \int\limits_{\{d<\varepsilon\}} \alpha_\varepsilon(d(\mathbf{x}))^q \,\mathrm{d}\mu(\mathbf{x}) \geqslant \mu(g)$$

Sobolev $\Rightarrow$ Isoperimetrica
III

Dimostrazione.

Per la formula di coarea

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_1 = \int_0^1 H_{n-1}(\{|u_\varepsilon| = t\})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\{d = t\})\alpha'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\varepsilon\to 0} H_{n-1}(\partial g)$$

$$\mu(g)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \to C\,H_{n-1}(\partial g)$$

$$\frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C < \infty$$

□

Sobolev $\Rightarrow$ Isoperimetrica
III

Dimostrazione.

Per la formula di coarea

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_1 = \int_0^1 H_{n-1}(\{|u_\varepsilon| = t\})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\{d = t\})\alpha'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\varepsilon\to 0} H_{n-1}(\partial g)$$

$$\mu(g)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \to C\,H_{n-1}(\partial g)$$

$$\frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C < \infty$$

□

Sobolev $\Rightarrow$ Isoperimetrica
III

Dimostrazione.

Per la formula di coarea

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_1 = \int_0^1 H_{n-1}(\{|u_\varepsilon| = t\})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\{d = t\})\alpha'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\varepsilon\to 0} H_{n-1}(\partial g)$$

$$\mu(g)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \to C\,H_{n-1}(\partial g)$$

$$\frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C < \infty$$

Dimostrazione.

Per la formula di coarea

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_1 = \int_0^1 H_{n-1}(\{|u_\varepsilon| = t\})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\{d = t\})\alpha'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\varepsilon \to 0} H_{n-1}(\partial g)$$

$$\mu(g)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \to C\,H_{n-1}(\partial g)$$

$$\frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C < \infty$$

Sobolev $\Rightarrow$ Isoperimetrica
III

Dimostrazione.

Per la formula di coarea

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_1 = \int_0^1 H_{n-1}(\{|u_\varepsilon| = t\})\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\{d = t\})\alpha'_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\varepsilon\to 0} H_{n-1}(\partial g)$$

$$\mu(g)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \to C\,H_{n-1}(\partial g)$$

$$\frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C < \infty$$

$\square$

Il teorema di Sobolev nel caso $p > 1$.

Definizione

Applichiamo la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg alla funzione

$$v = |u|^{p(n-1)/(n-p)} \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione.

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C \|\nabla v\|_1$$

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} = \left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$$

$$\|\nabla v\|_1 \leqslant \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{(p-1)n}{n-p}} \|\nabla u\|_p$$

$$\frac{p(n-1)}{n-p} - \frac{(p-1)n}{n-p} = 1$$

Il teorema di Sobolev nel caso $p > 1$.

Definizione

Applichiamo la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg alla funzione

$$v = |u|^{p(n-1)/(n-p)} \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione.

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C\,\|\nabla v\|_1$$

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} = \left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$$

$$\|\nabla v\|_1 \leqslant \frac{p(n-1)}{n(n-p)}\left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{(p-1)n}{n-p}}\|\nabla u\|_p$$

$$\frac{p(n-1)}{n-p} - \frac{(p-1)n}{n-p} = 1$$

Il teorema di Sobolev nel caso $p > 1$.

Definizione

Applichiamo la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg alla funzione

$$v = |u|^{p(n-1)/(n-p)} \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione.

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C\,\|\nabla v\|_1$$

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} = \left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$$

$$\|\nabla v\|_1 \leqslant \frac{p(n-1)}{n(n-p)}\left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{(p-1)n}{n-p}}\|\nabla u\|_p$$

$$\frac{p(n-1)}{n-p} - \frac{(p-1)n}{n-p} = 1$$

Il teorema di Sobolev nel caso $p > 1$.

Definizione

Applichiamo la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg alla funzione

$$v = |u|^{p(n-1)/(n-p)} \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione.

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C\,\|\nabla v\|_1$$

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} = \left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$$

$$\|\nabla v\|_1 \leqslant \frac{p(n-1)}{n(n-p)}\left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{(p-1)n}{n-p}} \|\nabla u\|_p$$

$$\frac{p(n-1)}{n-p} - \frac{(p-1)n}{n-p} = 1$$

Il teorema di Sobolev nel caso $p > 1$.

Definizione

Applichiamo la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg alla funzione

$$v = |u|^{p(n-1)/(n-p)} \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione.

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C\,\|\nabla v\|_1$$

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} = \left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$$

$$\|\nabla v\|_1 \leqslant \frac{p(n-1)}{n(n-p)}\left(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}}\right)^{\frac{(p-1)n}{n-p}}\|\nabla u\|_p$$

$$\frac{p(n-1)}{n-p} - \frac{(p-1)n}{n-p} = 1$$

Il teorema di Sobolev nel caso $p > 1$.

Definizione

Applichiamo la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg alla funzione

$$v = |u|^{p(n-1)/(n-p)} \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione.

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C\,\|\nabla v\|_1$$

$$\|v\|_{\frac{n}{n-1}} = (\|u\|_{\frac{pn}{n-p}})^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$$

$$\|\nabla v\|_1 \leqslant \frac{p(n-1)}{n(n-p)}(\|u\|_{\frac{pn}{n-p}})^{\frac{(p-1)n}{n-p}}\,\|\nabla u\|_p$$

$$\frac{p(n-1)}{n-p} - \frac{(p-1)n}{n-p} = 1$$

Conclusioni

- Abbiamo presentato la disuguaglianza Isoperimetrica e quella di Gagliardo-Nirenberg ($p \geqslant 1$).
- Abbiamo mostrato come esista un'equivalenza tra la prima e la seconda nel caso $p = 1$.
- Abbiamo mostrato che le costanti ottimali coincidono.
- Abbiamo mostrato che la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg per $p = 1$ implica quella nel caso $p > 1$, e che queste implicano il teorema di Sobolev.

Conclusioni

- Abbiamo presentato la disuguaglianza Isoperimetrica e quella di Gagliardo-Nirenberg ($p \geqslant 1$).
- Abbiamo mostrato come esista un'equivalenza tra la prima e la seconda nel caso $p = 1$.
- Abbiamo mostrato che le costanti ottimali coincidono.
- Abbiamo mostrato che la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg per $p = 1$ implica quella nel caso $p > 1$, e che queste implicano il teorema di Sobolev.

Conclusioni

- Abbiamo presentato la disuguaglianza Isoperimetrica e quella di Gagliardo-Nirenberg ($p \geqslant 1$).
- Abbiamo mostrato come esista un'equivalenza tra la prima e la seconda nel caso $p = 1$.
- Abbiamo mostrato che le costanti ottimali coincidono.
- Abbiamo mostrato che la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg per $p = 1$ implica quella nel caso $p > 1$, e che queste implicano il teorema di Sobolev.

Conclusioni

- Abbiamo presentato la disuguaglianza Isoperimetrica e quella di Gagliardo-Nirenberg ($p \geqslant 1$).
- Abbiamo mostrato come esista un'equivalenza tra la prima e la seconda nel caso $p = 1$.
- Abbiamo mostrato che le costanti ottimali coincidono.
- Abbiamo mostrato che la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg per $p = 1$ implica quella nel caso $p > 1$, e che queste implicano il teorema di Sobolev.

Bibliografia essenziale

AA.VV.
Note sul Problema di Plateau.
Università di Pisa, 1974.

V. G. Maz'ja.
Sobolev Spaces.
Springer-Verlag, 1985.

L. Ambrosio.
Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle Superfici Minime.
Scuola Normale Superiore, 1997.

R.A. Adams e J.J.F. Fournier.
Sobolev Spaces.
Elsevier Science, 2003.