Teoremi di funzione implicita vecchi e nuovi

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Sintesi

Angelo Lucia
lucia@poisson.phc.unipi.it
16 settembre 2011

Il teorema di funzione implicita è stato, al di là di uno strumento straordinario per lo sviluppo dell'Analisi Matematica, uno dei paradigmi più longevi e proficui della matematica moderna. Presente in forma embrionale nei lavori di Newton e di Leibniz, e formulato nella forma in cui la conosciamo oggi da Dini, il teorema di funzione implicita ha oltrepassato il contesto nel quale è nato diventando non solo un risultato valido sotto le più diverse ipotesi, ma una categoria di pensiero con il quale si affrontano i problemi. Probabilmente il più importante risultato in tal senso è il teorema di Nash-Moser, il quale mostra che un teorema di funzione implicita può essere usato per risolvere non solo problemi concreti, ma è anche uno strumento teorico di grande valore.

Un teorema di funzione implicita è, in maniera astratta, una maniera per assegnare ad una funzione $f : X \times Y \to Z$, alcune condizioni di *non degenerazione* che assicurino l'esistenza (locale) di soluzioni $y = h(x)$ dell'equazione,

$$f(x, y) = 0.$$

Com'è ben noto, nel teorema di Dini la condizione di non degenerazione è una richiesta sull'invertibilità del differenziale parziale $\partial_y f(x, y)$.

La tesi tratta le possibili generalizzazioni di questo risultato al contesto degli spazi di Banach. Il tal senso la letteratura è molto ricca, anche se talvolta carente di organicità: uno degli obiettivi dell'elaborato è anche quello di cercare di presentare con maggior uniformità i risultati ottenuti finora.

In particolare, una delle costanti ritrovate praticamente nella totalità dei risultati studiati, è la dipendenza da un risultato di esistenza molto elementare. Nella maggior parte dei risultati questo fondamento si trova nel teorema delle contrazioni, e difatti ci sono affinità enormi tra questi risultati. Un recente risultato di Ekeland utilizza al contrario l'omonimo teorema variazionale, e di fatto il "teorema di funzione implicita" (trattasi in realtà di teorema di locale surgettività) che si può ottenere ha ipotesi non comparabili con i teoremi che si basano sul teorema delle contrazioni.

Nel primo capitolo si affronta in maniera molto generale quali possono essere le definizioni di differenziabilità di mappe tra spazi di Banach. Si danno quattro diverse definizioni, due delle quali universalmente conosciute (differenziabilità di Gâteaux e di Fréchet), mentre altre due meno note: la differenziabilità debole secondo Gâteaux, e la quasi-differenziabilità. Di queste quattro diverse definizioni si danno proprietà essenziali ed in particolare si dimostra che è possibile ordinarle in una scala, dalla definizione più forte (quella di Fréchet) a quella più debole (quella di Gâteaux debole).

Si mostra altresì, tramite controesempi, che le implicazioni sono strette, e si danno condizioni sotto le quali è possibile invertire tali implicazioni, sintetizzate dallo schema di figura .

$$
\begin{tikzcd}
\text{F-diff.} \arrow[r, Rightarrow] & \text{quasi-diff.} \arrow[l, bend right, "\dim X<\infty"'] \arrow[r, Rightarrow] & \text{G-diff.} \arrow[l, bend right, "f \text{ lipschitz}"'] \arrow[r, Rightarrow] & \text{debole G-diff.} \arrow[l, bend right, "\dim Y<\infty"'] \arrow[lll, bend left, "Df\in C(U,L(X,Y))"] \arrow[ll, bend left, "Df\in C(U\times X,Y)"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1: Relazioni tra le diverse definizioni di differenziale per una funzione continua $f : X \to Y$.

Nel secondo capitolo, si presentano alcune classi di operatori tra spazi L^p, i cosidetti operatori di sovrapposizione o di Nemistki e quelli di Hammerstein, che forniscono utili esempi, dal momento che sotto opportune ipotesi essi sono operatori quasi-differenziabili ma non Fréchet differenziabili.

Nel terzo capitolo si affronta un problema collegato a quello di funzione implicita, ovvero il problema di determinare condizioni sufficienti per assicurare l'iniettività locale di una data mappa f. Si dimostra una condizione molto semplice nel caso in cui f sia F-differenziabile, mentre nel caso in cui il dominio abbia dimensione finita, si ottengono condizioni dipendenti dal solo differenziale di Gâteaux. In particolare, se $Df(x)$ è iniettivo in un intorno di x_0, anche f lo è. Questo risultato non si estende, senza ulteriori ipotesi, in dimensione infinita, come mostra un semplice controesempio.

Nel quarto capitolo si affronta finalmente il problema della funzione implicita, presentando una serie di risultati che si basano sul teorema delle contrazioni tra spazi metrici. Dal risultato oramai classico di Hildebrandt-Graves, che richiede la F-differenziabilità, si arriva ai risultati di Deimling e di Tarsia, dove si richiede l'esistenza di una funzione invertibile che approssimi, in un senso opportuno, la mappa in esame. In particolare si mostra come questi due teoremi, nonostante abbiano avuto una genesi radicalmente diversa, sono equivalenti. Si mostra altresì sotto quali ipotesi il differenziale di Gâteaux può essere la funzione approssimante richiesta.

Infine, nell'ultimo capitolo, si presenta il risultato più recente, dovuto a Ekeland. Si discute l'omonimo principio variazionale sul quale questo si basa, e se ne da una intepretazione di tipo geometrico immediatamente comprensibile. Si presenta poi il risultato di Ekeland, che è un teorema di locale surgettività, e se ne mostra una formulazione equivalente come teorema di funzione implicita.