Generalizzare gli operatori vicini negli spazi di Fréchet

24 agosto 2011

1 contesto e motivazione

Campanato dà la seguente definizione di *operatori vicini*

Definizione 1.1. Sia X un insieme, $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Siano A, B due funzioni da X in E. Allora diremo che A è *vicino* a B se esistono $\alpha > 0$, $k \in (0,1)$ tali che

$$\|B(x) - B(y) - \alpha(A(x) - A(y))\| \leqslant k \, \|B(x) - B(y)\| \quad \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

Con queste ipotesi, Campanato dimostra il seguente risultato

Teorema 1.1. *Sia $A : X \to E$. Allora A è bigettivo (rispettivamente, iniettivo, surgettivo) se e solo se è vicino ad un operatore bigettivo (risp., iniettivo, surgettivo).*

È possibile generalizzare la definizione di Campanato agli spazi vettoriali metrici completi rispetto ad una distanza invariante per traslazioni (Rudin li chiama *F-spazi*, e contengono come sotto-caso gli spazi di Fréchet).

Definizione 1.2. Sia X un insieme, e F un F-spazio. Sia $d : F \times F \to \mathbb{R}^+$ una metrica su F che induce la topologia, che sia invariante per traslazioni. Siano A, B due funzioni da X in F. Diremo che A è *vicino* a B se esiste un $\alpha > 0$ ed un $k \in (0,1)$ tali che

$$d(B(x) - \alpha A(x), B(y) - \alpha A(y)) \leqslant k d(B(x), B(y)) \quad \forall x, y \in X. \tag{1.2}$$

Con questa definizione buona parte delle proprietà degli operatori vicini si mantiene: se A è vicino a B e B è bigettivo (rispettivamente, iniettivo o surgettivo), allora A è bigettivo (rispettivamente, iniettivo o surgettivo).

2 problema

Sia dato uno spazio di Fréchet F ed una successione di seminorme $(\|\cdot\|_n)$ che defiscono la topologia.

Idealmente, si potrebbe cercare di relazionare l'equazione (1.2) con delle equazioni della forma seguente

$$\|B(x) - B(y) - \alpha(A(x) - A(y))\|_n \leqslant k_n \|B(x) - B(y)\|_n \quad \forall n. \tag{2.1}$$

Per fare ciò, chi chiediamo: come sono fatte le distanze invartianti per traslazioni su F?

Fissiamo $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una funzione che verifichi

1. φ è continua e monotona crescente;
2. $\varphi(0) = 0$;
3. $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$;
4. φ è limitata.

Con queste ipotesi, per ogni $x \in F$, $(\varphi(\|x\|_n))_n$ è un elemento di ℓ^∞.

Sia inoltre $\eta : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ un funzionale che verifichi

1. η è continuo;
2. $\eta(x + y) \leqslant \eta(x) + \eta(y)$;
3. η è strettamente positivo: se $x < y$, allora $\eta(x) < \eta(y)$.

Queste ipotesi sono verificate, per esempio, nel caso in cui η sia un funzionale lineare continuo e positivo.

Possiamo dunque definire

$$d(x, y) = \eta\Big((\varphi(\|x - y\|_n))_n\Big) \quad \forall x, y \in F. \tag{2.2}$$

Così definita, d è una distanza su F, invariante per traslazioni, che induce la topologia delle seminorme su F.

Di questa forma sono le seguenti distanze, che vengono definite di solito nella letteratura sugli spazi di Fréchet:

$$d_1(x, y) = \sup_n \alpha_n \, \varphi(\|x - y\|_n) \quad \text{con } (\alpha_n)_n \in \ell^1; \tag{2.3}$$

$$d_2(x, y) = \sum_n \alpha_n \, \varphi(\|x - y\|_n) \quad \text{con } (\alpha_n)_n \in \ell^1. \tag{2.4}$$

Putroppo, per distanze della forma (2.2), l'equazione (1.2) implica

$$\eta\Big(\varphi(\|B(x)-B(y)-\alpha(A(x)-A(y))\|_n)-k\varphi(\|B(x)-B(y)\|_n)\Big)\leqslant 0. \quad (2.5)$$

Questa ultima disuguaglianza non implica né è conseguenza di (2.1).

3 domande

Esistono altre distanze su F, invarianti per traslazioni ed equivalenti alla topologia delle seminorme, che non siano della forma (2.2)?

Esistono conseguenze note dell'equazione (1.2), o detto altrimenti: quanto "male" possono comportarsi rispetto alle seminorme delle contrazioni metriche di uno spazio di Fréchet?