Teoremi di funzione implicita vecchi e nuovi

Tesi di Laurea Magistrale

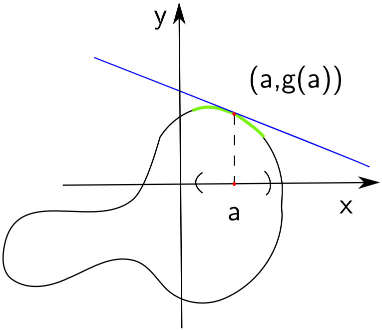
Angelo Lucia

Università di Pisa

30 settembre 2011

Lo schema

$$F : X \times Y \to Z, \quad F(0,0) = 0$$
$$F(x, y(x)) = 0.$$



Indice

Indice

Differenziabilità

Definizione

$f : X \to Y$, $x_0 \in X$. f si dice

$$
\begin{aligned}
&\text{F-diff. in } x_0 \text{ se} && f(x_0+u) = f(x_0) + Tu + o(\|u\|);\\
&\text{quasi-diff. in } x_0 \text{ se} && f(x_0+g(t)) = f(x_0) + Tg'(0) + o(|t|);\\
&\text{G-diff. in } x_0 \text{ se} && f(x_0+tv) = f(x_0) + tTv + o(|t|);\\
&\text{debole G-diff. in } x_0 \text{ se} && f(x_0+tv) = f(x_0) + tTv + \text{weak-}o(|t|);
\end{aligned}
$$

con $T \in L(X, Y)$.

Osservazione

Se $T \in L(X, Y)$ esiste, allora è unico: scriveremo $Df(x_0) := T$.

Differenziabilità - relazioni

Relazioni tra le definizioni di differenziale

Sia $f : X \to Y$. Allora

$$\begin{array}{c} \text{F-diff.} \\ \Downarrow \\ \text{quasi-diff.} \\ \Downarrow \\ \text{G-diff.} \\ \Downarrow \\ \text{debole G-diff.} \end{array}$$

Differenziabilità - relazioni

Relazioni tra le definizioni di differenziale

Sia $f : X \to Y$. Allora

$$
\begin{tikzcd}
\text{F-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{quasi-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{G-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{debole G-diff.} \arrow[u, bend right, "\dim Y < \infty"']
\end{tikzcd}
$$

debole G. diff $\not\Rightarrow$ G diff.

Esempio

Sia $(e_n) \subset \ell^2$ base canonica, $\eta : (0,1) \to B_{\ell^2}$ curva continua affine a tratti tale che

$$\eta(1/n) = e_n.$$

Sia

$$\begin{array}{cccc} f: & (-1,1) & \longrightarrow & \ell^2, \\ & t & \longmapsto & t\,\eta(|t|). \end{array}$$

Allora f è continua, vale

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \eta(|t|),$$

e quindi f è debolmente G-diff in 0. ma non G-diff.

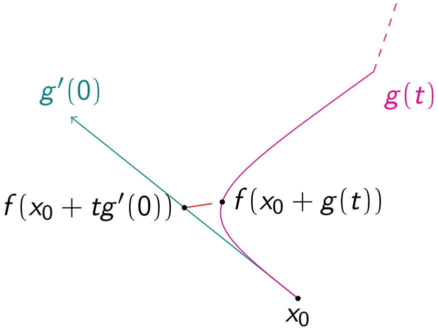
Differenziabilità - relazioni

Relazioni tra le definizioni di differenziale

Sia $f : X \to Y$. Allora

$$\begin{tikzcd}
\text{F-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{quasi-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{G-diff.} \arrow[u, bend right, "f \text{ lipschitz}"'] \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{debole G-diff.} \arrow[u, bend right, "\dim Y < \infty"']
\end{tikzcd}$$

G-diff. + f lipschitz $\Rightarrow$ quasi-diff.



$$\left\| f(x_0 + g(t)) - f(x_0 + tg'(0)) \right\| \leqslant K \left\| g(t) - tg'(0) \right\| = o(|t|).$$

G-diff. $\not\Rightarrow$ quasi-diff.

Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y = 0, \\ \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora f è G-diff. e vale

$$Df(0) = 0.$$

ma se $\gamma(t) = (t, t^2)$ si ha che

$$f \circ \gamma(t) = \frac{1}{2} t,$$

e quindi $(f \circ \gamma)'(0) = \frac{1}{2}$.

Differenziabilità - relazioni

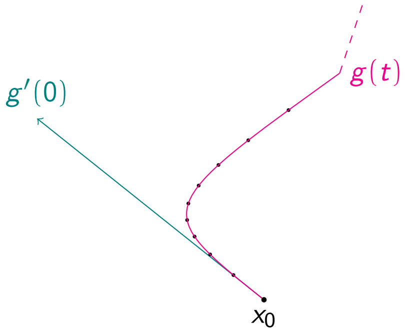
Relazioni tra le definizioni di differenziale

Sia $f : X \to Y$. Allora

$$\begin{tikzcd}
\text{F-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{quasi-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[u, bend right, "\dim X < \infty"'] \\
\text{G-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[u, bend right, "f \text{ lipschitz}"'] \\
\text{debole G-diff.} \arrow[u, bend right, "\dim Y < \infty"']
\end{tikzcd}$$

quasi-diff. $+ \dim X < \infty \Rightarrow$ F-diff.

quasi-diff. + $\dim X < \infty \Rightarrow$ F-diff.



quasi-diff. $\not\Rightarrow$ F-diff.

Esempio

Sia $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definita da

$$Tu(x) = \operatorname{sen} u(x).$$

Allora si ha che T è quasi-differenziabile e vale

$$DT(u)[v](x) = v(x) \cos u(x).$$

Ma T non è F-diff., e difatti la mappa seguente non è continua

$$\begin{array}{cccccc} DT : & L^2 & \longrightarrow & L^\infty & \hookrightarrow & L(L^2, L^2), \\ & u(x) & \longmapsto & \cos u(x) & \longmapsto & M_{\cos u(x)}. \end{array}$$

Indice

Proprietà delle funzioni debolmente G-diff.

Teorema (Valor medio)

Sia $f : X \to Y$ debolmente G-differenziabile, x, $y \in X$. Indichiamo con

$$]x, y[\, := \{x + t(y - x) \mid t \in (0, 1)\}.$$

Allora vale

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \sup_{\xi \in]x,y[} \|Df(\xi)\| \, \|x - y\| \, .$$

In particolare, se $\|Df(x)\| \leqslant K < +\infty$, f è K-lipschitziana.

Continuità del differenziale

Definizione

Sia $f : X \to Y$ debolmente G-diff. Allora diremo che

$f \in C^1_q$ se $Df : X \times X \to Y$ è continua;

$f \in C^1$ se $Df : X \to L(X, Y)$ è continua.

$$C^1_q(X, Y) \subsetneq C^1(X, Y).$$

Teorema (Differenziale totale)

Se $f \in C^1$, allora f è F-diff.

Teorema

Se $f \in C^1_q$, allora f è quasi-diff.

Continuità del differenziale

Definizione

Sia $f : X \to Y$ debolmente G-diff. Allora diremo che

$f \in C^1_q$ se $Df : X \times X \to Y$ è continua;

$f \in C^1$ se $Df : X \to L(X, Y)$ è continua.

$$C^1_q(X, Y) \subsetneq C^1(X, Y).$$

Teorema (Differenziale totale)

Se $f \in C^1$, allora f è F-diff.

Teorema

Se $f \in C^1_q$, allora f è quasi-diff.

Differenziabilità - relazioni

Relazioni tra le definizioni di differenziale

Sia $f : X \to Y$. Allora

$$\begin{tikzcd}
\text{F-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{quasi-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[u, bend right, "\dim X < \infty"'] \\
\text{G-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[u, bend right, "f \text{ lipschitz}"'] \\
\text{debole G-diff.} \arrow[u, bend right, "\dim Y < \infty"'] \arrow[uuu, bend left=60, blue, "Df \in C^0(X, L(X, Y))"] \arrow[uu, bend left=80, red, "Df \in C^0(X \times X, Y)"]
\end{tikzcd}$$

Indice

Locale iniettività

Lemma

Sia $f : X \to Y$ continua e F-diff. in $x_0 \in X$. Allora se $Df(x_0)$ è inversa destra, esiste V intorno di x_0 tale che $f|_V$ è iniettiva.

Osservazione

Se X e Y hanno dimensione finita, e $f : X \to Y$ è (debolmente) G-diff. e lipschitziana, allora è F-diff.

Locale iniettività in dimensione finita

Proposizione

Supponiamo che $\dim X < \infty$, $f : X \to Y$ *continua e G-diff. e* $Df(x)$ *iniettiva* $\forall x$.
Allora f *è localmente iniettiva.*

Un controesempio

Esempio

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato, e consideriamo

$$\begin{array}{rccc} f: & L^2(\Omega,\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\Omega,\mathbb{R}^2), \\ & u(x) & \longmapsto & (\cos u(x), \operatorname{sen} u(x)). \end{array}$$

f è continua, quasi-differenziabile ma non F-differenziabile, e vale

$$Df(u)[v](x) = v(x)(-\operatorname{sen} u(x), \cos u(x)),$$

e quindi $\|Df(u)[v]\| = \|v\|$: $Df(u)$ è una isometria per ogni $u \in L^2(\Omega,\mathbb{R})$.
Ma f non è mai localmente iniettiva: se $E \subset \Omega$ misurabile, allora

$$f(u) = f(u + 2\pi\chi_E).$$

Indice

Teorema di Hildebrandt-Graves (1927)

Teorema (Funzione implicita)

Sia $F : X \times Y \to Z$ continua, $F(0,0) = 0$. Supponiamo che F sia F-differenziabile nella variabile y, e che

$$(x, y) \to D_2F(x, y)$$

sia continua come mappa $X \times Y \to L(Y, Z)$. Allora se $D_2F(0,0)$ è un isomorfismo, esistono $U_0 \subset X$ intorno di 0 e $V_0 \subset Y$ intorno di 0, ed una unica mappa continua $G : U_0 \to V_0$ tali che

$$F(x, G(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0.$$

Dimostrazione.

Teorema delle contrazioni... $\square$

Indice

Teorema di Tarsia

Teorema (Tarsia)

Sia $F : X \times Y \to Z$ *continua,* $F(0,0) = 0$*. Supponiamo che esista* $A : Y \to Z$ *tale che*

$$\left\| F(x,y) - F(x,y') - (A(y) - A(y')) \right\| \leqslant k \left\| A(y) - A(y') \right\| .$$

Allora se A *è un omeomorfismo, e* $k < 1$*, esistono* $U_0 \subset X$ *intorno di* 0 *e* $V_0 \subset Y$ *intorno di* 0*, ed una unica mappa continua* $G : U_0 \to V_0$ *tali che*

$$F(x, G(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0.$$

Dimostrazione

Consideriamo

$$z \to F(\overline{x}, A^{-1}(z)).$$

Teorema di Tarsia

Teorema (Tarsia)

Sia $F : X \times Y \to Z$ *continua,* $F(0,0) = 0$*. Supponiamo che esista* $A : Y \to Z$ *tale che*

$$\left\| F(x,y) - F(x,y') - (A(y) - A(y')) \right\| \leqslant k \left\| A(y) - A(y') \right\|.$$

Allora se A *è un omeomorfismo, e* $k < 1$*, esistono* $U_0 \subset X$ *intorno di* 0 *e* $V_0 \subset Y$ *intorno di* 0*, ed una unica mappa continua* $G : U_0 \to V_0$ *tali che*

$$F(x, G(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0.$$

Dimostrazione

Consideriamo

$$z \to F(\overline{x}, A^{-1}(z)).$$

Esempio

Sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, e $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile, tali che

$$|f(x,s) - f(x,t)| \leqslant \alpha |s-t| \, ; \quad \|k\|^{\star}_{\infty,1} := \operatorname*{sup\,ess}_{t\in\Omega} \int_{\Omega} |k(x,t)| \, dx < \infty.$$

Allora, se $\alpha \|k\|^{\star}_{\infty,1} < 1$, l'equazione

$$u(x) = v(x) + \int_{\Omega} k(x,t) f(t, u(t)) \, dt,$$

ha una unica soluzione $u \in L^1(\Omega)$ per ogni scelta di $v \in L^1(\Omega)$, e u dipende con continuità da v.

Conseguenze del teorema del valor medio

Corollario

Sia $F : X \times Y \to Z$ continua, e debolmente G-differenziabile nella seconda variabile. Se $A = D_2F(0,0)$ è un isomorfismo, e esistono intorni U di 0 e V di 0 tali che

$$k := \sup_{(x,y)\in U\times V} \left\| D_2F(x,y)D_2F(0,0)^{-1} - I \right\| < 1$$

allora vale che

$$\left\| F(x,y) - F(x,y') - A(y-y') \right\| \leqslant k \left\| A(y-y') \right\| .$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Tarsia con $A = D_2F(0,0)$.

Conseguenze del teorema del valor medio

Corollario

$$k := \sup_{(x,y)\in U\times V} \left\| D_2F(x,y)D_2F(0,0)^{-1} - I \right\| < 1$$

Osservazione

Se $F(x,y)$ è C^1, allora possiamo scegliere U e V tali che k sia arbitrariamente piccolo.

Indice

Principio Variazionale di Ekeland

Teorema

Sia V uno spazio metrico completo, $F : V \to \mathbb{R}$ semi-continuo inferiormente, $F \not\equiv +\infty$ e $\inf F > -\infty$. Allora per ogni $u \in V$, per ogni $\varepsilon \geqslant F(u) - \inf F$, per ogni $\lambda > 0$, esiste un $v \in V$ tale che

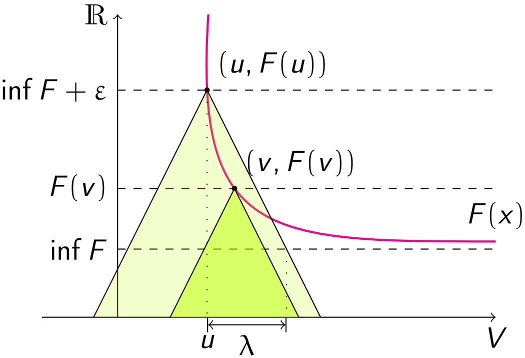
$$\begin{aligned} & F(v) \leqslant F(u), \\ & d(u,v) \leqslant \lambda, \\ \forall w \neq v, \qquad & F(w) - F(v) > -\frac{\varepsilon}{\lambda} d(v,w), \end{aligned}$$

Principio Variazionale di Ekeland

Principio di Ekeland

$$F(v) \leqslant F(u),$$
$$d(u, v) \leqslant \lambda,$$

$$\forall w \neq v,$$
$$F(w) - F(v) > -\frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w).$$



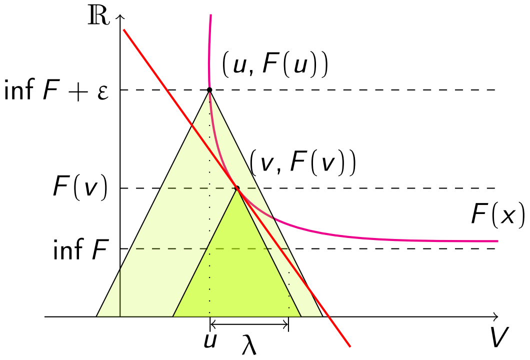
Definizione

$$C(v, a) := \left\{ (w, b) \in V \times \mathbb{R} \mid b - a \leqslant -\frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w) \right\}.$$

Principio di Ekeland

$$F(v) \leqslant F(u),$$
$$d(u, v) \leqslant \lambda,$$

$$\forall w \neq v,$$
$$F(w) - F(v) > -\frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w).$$



Definizione

$$C(v, a) := \left\{ (w, b) \in V \times \mathbb{R} \,|\, b - a \leqslant -\frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w) \right\}.$$

Indice

Teorema

Sia $F : X \times Y \to Z$ continua, $F(0,0) = 0$. Supponiamo che F sia G-differenziabile nella variabile y, e che $D_2F(x,y)$ abbia un'inversa destra $R(x,y)$, uniformemente limitata

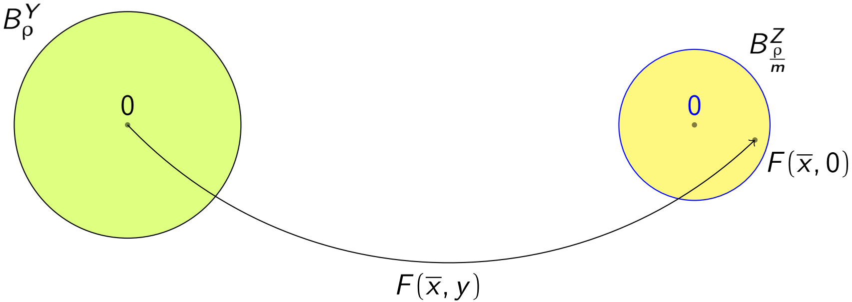
$$\exists \rho > 0 \text{ t.c. } \sup_{\|(x,y)\| \leqslant \rho} \|R(x,y)\| \leqslant m < \infty.$$

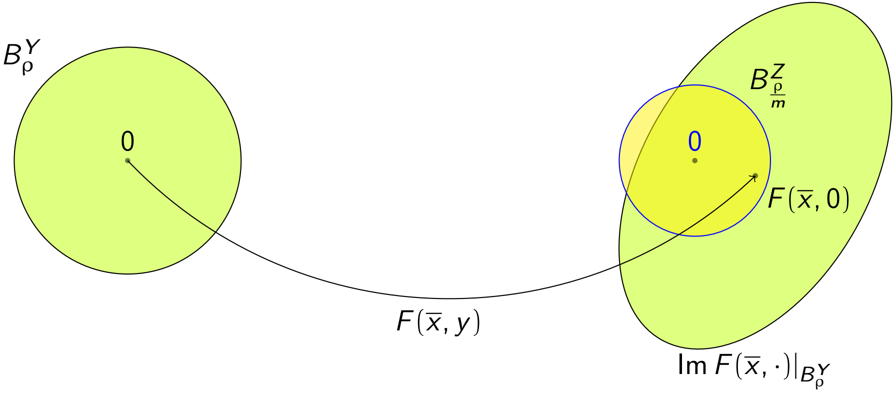
Allora esiste $U_0 \subset X$ intorno di 0 e, per ogni $\mu > m$, una funzione $G : U_0 \to B_\rho^Y$ tale che, per ogni $x \in U_0$:

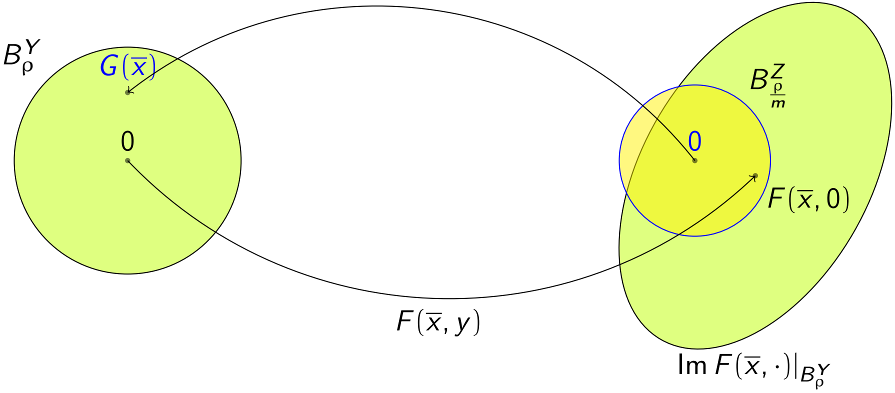
$$\|G(x)\| \leqslant \mu \|F(x,0)\|,$$
$$F(x, G(x)) = 0.$$


B^Y_ρ
0
$B^Z_{\frac{\rho}{m}}$
0

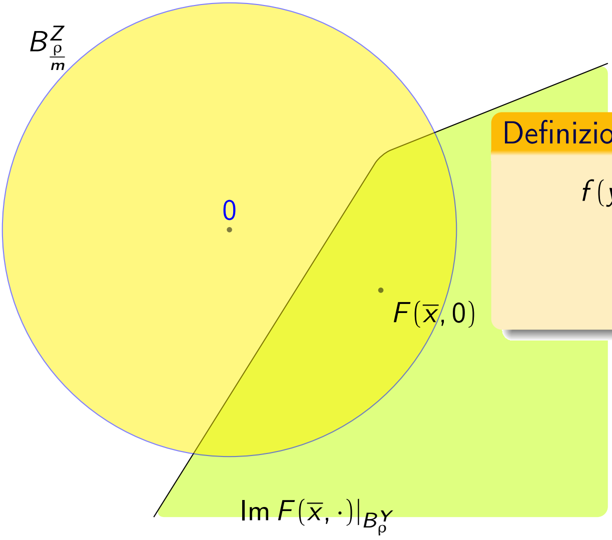
Dimostrazione del Teorema




B_ρ^Y
0
$B^Z_{\frac{\rho}{m}}$
0
$F(\overline{x}, 0)$
$F(\overline{x}, y)$
$\operatorname{Im} F(\overline{x}, \cdot)|_{B_\rho^Y}$


B_ρ^Y
$G(\overline{x})$
0
0
$B^Z_{\frac{\rho}{m}}$
$F(\overline{x}, 0)$
$F(\overline{x}, y)$
$\operatorname{Im} F(\overline{x}, \cdot)|_{B_\rho^Y}$

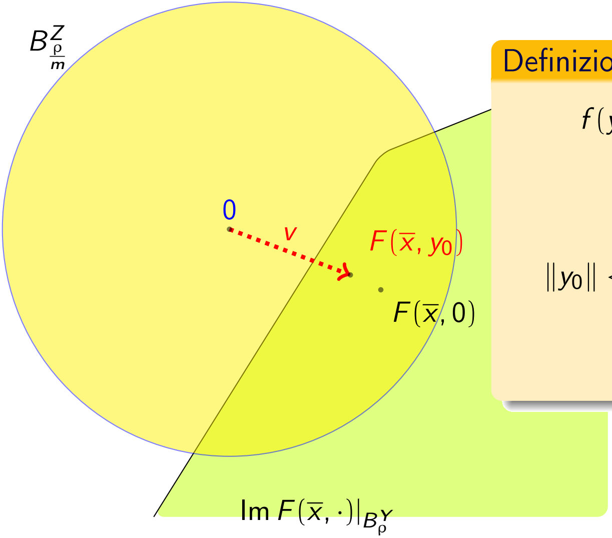
Dimostrazione del Teorema



Definizione

$$f(y) = \|F(\overline{x}, y)\|,$$

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{\mu};$$



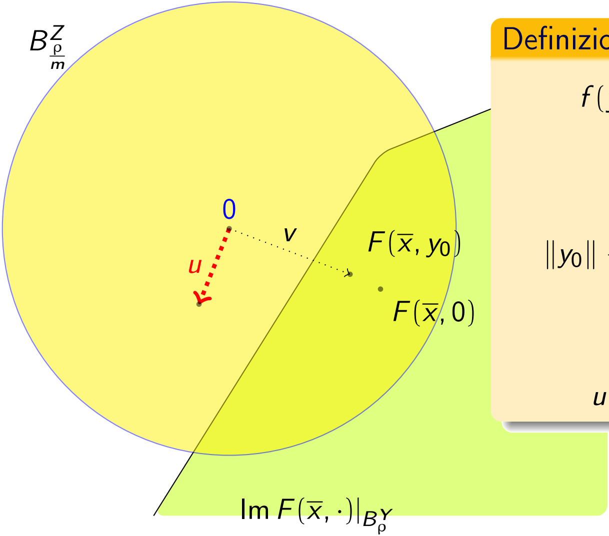
Definizione

$$f(y) = \|F(\overline{x}, y)\|,$$

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{\mu};$$

$$\|y_0\| < \rho; \;\; f(y_0) \leqslant f(0);$$

$$v = F(\overline{x}, y_0),$$



Definizione

$$f(y) = \|F(\overline{x}, y)\|,$$

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{\mu};$$

$$\|y_0\| < \rho; \ f(y_0) \leqslant f(0);$$

$$v = F(\overline{x}, y_0),$$

$$u = -R(\overline{x}, y_0)v.$$

Dimostrazione.

$$f(y) = \|F(\overline{x}, y)\|$$

$$\frac{\|F(\overline{x}, y_0 + tu)\| - \|F(\overline{x}, y_0)\|}{t} \geqslant -\frac{1}{\mu}\|u\| \geqslant -\frac{m}{\mu}\|v\|,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|F(\overline{x}, y_0 + tu)\| - \|F(\overline{x}, y_0)\|}{t} = \left\langle \frac{F(\overline{x}, y_0)}{\|F(\overline{x}, y_0)\|}, D_2F(\overline{x}, y_0)u \right\rangle = -\|v\|.$$

e quindi

$$\|F(\overline{x}, y_0)\| \leqslant \frac{m}{\mu}\|F(\overline{x}, y_0)\|.$$

□

Dimostrazione.

$$f(y) = \|F(\overline{x}, y)\|$$

$$\frac{\|F(\overline{x}, y_0 + tu)\| - \|F(\overline{x}, y_0)\|}{t} \geqslant -\frac{1}{\mu}\|u\| \geqslant -\frac{m}{\mu}\|v\|,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|F(\overline{x}, y_0 + tu)\| - \|F(\overline{x}, y_0)\|}{t} = \left\langle \frac{F(\overline{x}, y_0)}{\|F(\overline{x}, y_0)\|}, D_2F(\overline{x}, y_0)u \right\rangle = -\|v\|.$$

e quindi

$$\|F(\overline{x}, y_0)\| \leqslant \frac{m}{\mu}\|F(\overline{x}, y_0)\|.$$

□

Dimostrazione.

$$f(y) = \|F(\overline{x}, y)\|$$

$$\frac{\|F(\overline{x}, y_0 + tu)\| - \|F(\overline{x}, y_0)\|}{t} \geqslant -\frac{1}{\mu}\|u\| \geqslant -\frac{m}{\mu}\|v\|,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|F(\overline{x}, y_0 + tu)\| - \|F(\overline{x}, y_0)\|}{t} = \left\langle \frac{F(\overline{x}, y_0)}{\|F(\overline{x}, y_0)\|}, D_2F(\overline{x}, y_0)u \right\rangle = -\|v\|.$$

e quindi

$$\|F(\overline{x}, y_0)\| \leqslant \frac{m}{\mu}\|F(\overline{x}, y_0)\|.$$

□

Conclusioni

- Diverse proprietà di approssimazione del differenziale;
- Teorema delle Contrazioni, perturbazioni lipschitziane e omemorfismi, ed una stima sulle norme del differenziale;
- Ekeland: locale surgettività invece di omeomorfismi.

Conclusioni

- Diverse proprietà di approssimazione del differenziale;
- Teorema delle Contrazioni, perturbazioni lipschitziane e omemorfismi, ed una stima sulle norme del differenziale;
- Ekeland: locale surgettività invece di omeomorfismi.

Conclusioni

- Diverse proprietà di approssimazione del differenziale;
- Teorema delle Contrazioni, perturbazioni lipschitziane e omemorfismi, ed una stima sulle norme del differenziale;
- Ekeland: locale surgettività invece di omeomorfismi.

FINE

Grazie per l'attenzione!

Appendice

appendice...

Teorema di Deimling

Teorema (Deimling)

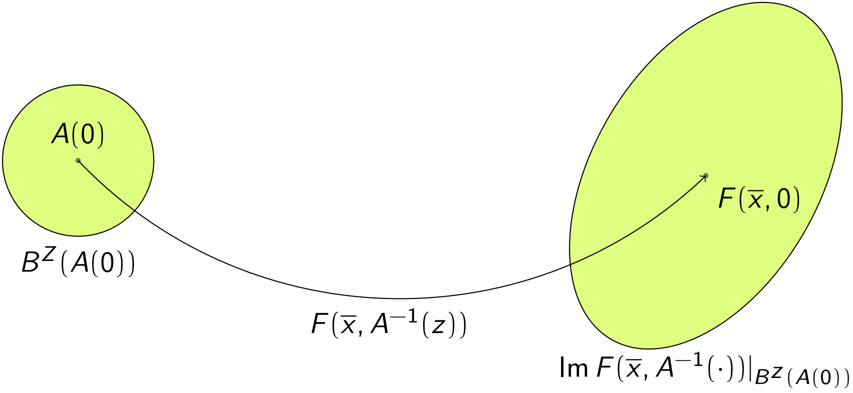
Sia $F : X \times Y \to Z$ *continua,* $F(0,0) = 0$*. Supponiamo che esista* $T \in L(Y,Z)$ *tale che*

$$\left\| F(x,y) - F(x,y') - T(y-y') \right\| \leqslant k \left\| y - y' \right\| .$$

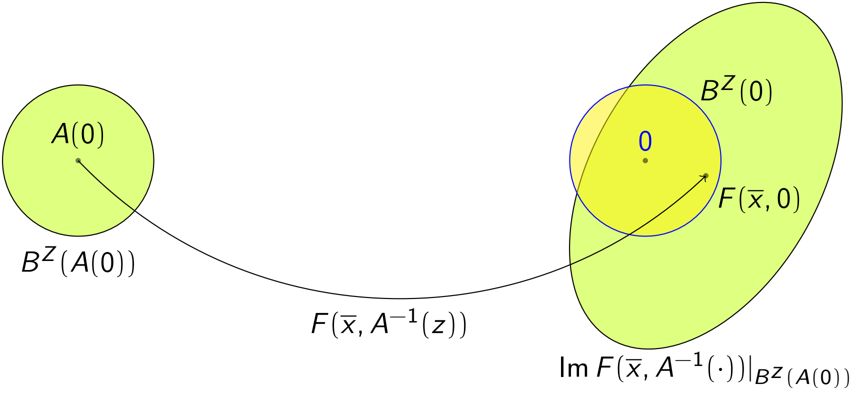
Allora se T *è un isomorfismo, e* $k \left\| T^{-1} \right\| < 1$*, esistono* $U_0 \subset X$ *intorno di* 0 *e* $V_0 \subset Y$ *intorno di* 0*, ed una unica mappa continua* $G : U_0 \to V_0$ *tali che*

$$F(x, G(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0.$$

Dimostrazione



Dimostrazione



Dimostrazione