Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Disuguaglianza isoperimetrica e teorema di Sobolev

25 settembre 2009

Tesi di Laurea Triennale

Candidato

Angelo Lucia

lucia@mail.dm.unipi.it

Relatore

Prof. Paolo Acquistapace

Università di Pisa

Controrelatore

Prof. Antonio Tarsia

Università di Pisa

Anno Accademico 2008/2009

Indice

1 Introduzione e notazioni

Il problema isoperimetrico ha origini antichissime. Nel caso bidimensionale, esso consiste nel determinare, fra tutte le curve piane chiuse di lunghezza finita L, quella (se esiste) che racchiude la regione di area massima; ovvero, equivalentemente, determinare, fra tutte le curve piane chiuse che racchiudono una regione di area fissata A, quella (se esiste) di lunghezza minima. La disuguaglianza isoperimetrica fornisce la risposta a questo problema: risulta

$$4\pi A \leqslant L^2$$

con uguaglianza se e solo se la curva è una circonferenza. Per giungere a questo risultato sono stati necessari molti secoli, molto lavoro e svariati errori. Nello spazio n-dimensionale, analogamente, si sa che fra tutte le superfici $(n-1)$-dimensionali compatte e senza bordo Σ, la sfera S^{n-1} è quella che racchiude la regione V di volume n-dimensionale massimo, e vale una stima del tipo

$$m_n(V) \leqslant c_n H_{n-1}(\Sigma)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{1.1}$$

con uguaglianza se e solo se $\Sigma = S^{n-1}$; qui c_n è una costante esattamente determinata e m_n, H_{n-1} sono rispettivamente la misura di Lebesgue e la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.
Il teorema di Sobolev è invece un importante risultato del secolo scorso, che è parte della fondamentale teoria degli spazi di Sobolev, con la quale ha preso il via la moderna teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali in forma debole, con estesi sviluppi al calcolo delle variazioni, alla teoria geometrica della misura e a moltissimi altri campi dell'analisi. Secondo il teorema di Sobolev, ogni funzione dello spazio $W^{1,p}(\Omega)$, ossia p-sommabile su un aperto (sufficientemente regolare) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e dotata di derivate prime deboli p-sommabili, con $1 \leqslant p < n$, risulta q-sommabile con $q = \frac{np}{n-p}$, e l'inclusione è continua. Nel caso $p = 1$ si ha $q = \frac{n}{n-1}$ e vale la maggiorazione

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{n}{n-1}} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c_n \int_\Omega |\nabla u| \, d\mathbf{x} \qquad \forall u \in W^{1,1}(\Omega). \tag{1.2}$$

Lo scopo di questa tesi è quello di illustrare un risultato ormai classico, vale a dire l'equivalenza fra le relazioni (1.1) e (1.2). Proveremo questo fatto in un caso lievemente più generale, sia rispetto alla classe degli insiemi considerati ammissibili per la disuguaglianza isoperimetrica, sia perché considereremo una generica misura μ (soggetta ad opportune ipotesi) in luogo della misura di Lebesgue m_n. A questo scopo si farà uso di vari strumenti della teoria geometrica della misura: ricoprimenti di Vitali, misure di Hausdorff, lemma di Sard, spazi di Sobolev (naturalmente), formula di coarea. Questi temi sono introdotti e analizzati nei capitoli 1, 2 e 3. Il capitolo 4 è invece dedicato alla dimostrazione dell'equivalenza fra (1.1) e (1.2), nonché alla prova del teorema di Sobolev.

1.1 Notazioni di base

Indichiamo con Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Con $B(\mathbf{x}_0, r)$ indicheremo la palla aperta di raggio r e centro $\mathbf{x}_0 \in \Omega$

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}\,.$$

Introduciamo i seguenti spazi di funzioni: $C^m(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni definite su Ω rispettivamente derivabili con continuità m volte e infinitamente derivabili.

Indichiamo con $C_0^\infty(\Omega)$ o con $\mathscr{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto in Ω, dove con supporto (indicato con $\operatorname{Supp}\varphi$) intendiamo la chiusura dell'insieme $\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}$.

Diremo che Ω è di classe C^k se per ogni $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ esistono un intorno U di $\mathbf{x}_0$ e una funzione $\varphi \in C^k(U)$ tali che

$$U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : \varphi(\mathbf{x}) = 0\}\,, \qquad \nabla\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0\ .$$

Diremo che Ω ha la *proprietà di Lipschitz forte* e diremo che è di classe $C^{0,1}$ se per ogni $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ esistono un intorno U di $\mathbf{x}_0$ e una funzione φ lipschitziana tali che

$$U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : \varphi(\mathbf{x}) = 0\}\ .$$

Su $\mathbb{R}^n$ definiamo in maniera standard la misura di Lebesgue n-dimensionale m_n.

Per ogni p tale che $1 \leqslant p < \infty$, indichiamo con $L^p(\Omega)$ lo spazio delle classi di funzioni (rispetto alla relazione di coincidenza quasi ovunque) *integrabili di ordine* p, ovvero

$$L^p(\Omega) = \left\{[f]\ :\ f \text{ è misurabile e } \int_\Omega |f|^p\ \mathrm{d}\mathbf{x} < \infty\right\}.$$

Com'è uso, confonderemo la classe di equivalenza $[f]$ con un suo qualsiasi rappresentante f. Questo non genererà ambiguità.

Su $L^p(\Omega)$ definiamo una norma come segue

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p\ \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}\ ;$$

$L^p(\Omega)$ dotato di tale norma è uno spazio di Banach (di Hilbert se $p = 2$).

Nel caso $p = \infty$, definiamo il sup essenziale di f come

$$\operatorname{supess} f = \inf\{\alpha \geqslant 0 : f(\mathbf{x}) \leqslant \alpha \quad \text{q.o. } \mathbf{x} \in \Omega\};$$

analogamente al caso p finito definiamo

$$L^\infty(\Omega) = \{[f] : f \text{ misurabile e } \operatorname{supess}|f| < \infty\}.$$

Dotiamo $L^\infty(\Omega)$ di una norma che lo rende uno spazio di Banach

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{supess}|f|.$$

Nel caso in cui Ω coincida con $\mathbb{R}^n$, oppure quando sarà ovvio dal contesto l'aperto a cui ci si riferisce, si indicherà la norma di $L^p(\Omega)$ semplicemente con $\|\cdot\|_p$, e ci riferiremo ad essa come *norma p*.

Alcune delle proprietà e delle definizioni che daremo saranno indipendenti dall'ordine di integrazione delle funzioni di cui tratteranno (ovvero, saranno definite per ogni funzione in $L^p(\Omega)$, e saranno indipendenti dall'indice p). In tali casi, ci serviremo della seguente definizione

Definizione 1.1. Una funzione misurabile f si dice *localmente integrabile* su Ω se è integrabile su ogni compatto K strettamente contenuto in Ω

$$\forall K \subset \Omega\,,\ K \text{ compatto} \quad \int_K |f|\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty.$$

Lo spazio delle funzioni localmente integrabili si indica con $L^1_{loc}(\Omega)$.

Osservazione 1.2. Ogni funzione appartenente ad $L^p(\Omega)$, per ogni $p \geqslant 1$, appartiene anche a $L^1_{loc}(\Omega)$.

Ogni funzione continua (e quindi ogni funzione appartenente a C^m, per ogni m), appartiene a $L^1_{loc}(\Omega)$.

Generalizziamo le definizioni precedenti nel caso che su Ω sia definita una misura di Radon μ, ovvero una misura che sia definita sulla σ-algebra dei Boreliani e tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\mu(\Omega \setminus K) < \varepsilon$. Questo comporta che μ sia σ-finita e che sia stretta, ovvero che, per ogni B Boreliano, valga

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B,\ K \text{ compatto}\}.$$

Definiamo analogamente al caso della misura di Lebesgue i concetti di integrabilità secondo μ, e di proprietà vere μ-quasi ovunque.

Possiamo quindi definire gli spazi $L^p(\Omega, \mu)$ delle funzioni integrabili secondo μ di ordine p e $L^\infty(\Omega, \mu)$ delle funzioni essenzialmente limitate secondo μ.

Infine, ricordiamo la notazione multi-indice standard. Chiamiamo *multi-indice* un elemento α di $\mathbb{N}^n$: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Definiamo

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i\,, \qquad \alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!\,,$$
$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} \quad \text{con } D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$
$$\mathbf{x}^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\,,$$
$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}\,,$$
$$\alpha \leqslant \beta \iff \alpha_i \leqslant \beta_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n\,,$$
$$\nabla_l = \{D^\alpha : |\alpha| = l\} \quad \text{e} \quad \nabla = \nabla_1\,.$$

1.2 Ricoprimenti di Vitali

Definizione 1.3. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$, e sia $\mathscr{M}$ una famiglia di palle (aperte o chiuse) di $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{M}$ forma un *ricoprimento di E nel senso di Vitali* se per ogni $\mathbf{x} \in E$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $U \in \mathscr{M}$ tale che $\mathbf{x} \in U$ e $m_n(U) < \varepsilon$.

Teorema 1.4 (di ricoprimento di Vitali)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathscr{M}$ un ricoprimento di E nel senso di Vitali. Allora esiste una sotto-famiglia al più numerabile $\{U_j\} \subset \mathscr{M}$ di palle disgiunte tale che $m_n(E \setminus \cup_j U_j) = 0$.*

Il teorema di ricoprimento di Vitali, è uno degli strumenti classici della teoria della misura. Si presta a numerose generalizzazioni, sia ampliando la classe di insiemi che possono formare un ricoprimento regolare, sia prendendo in considerazioni misure diverse dalla misura m_n di Lebesgue. Una dimostrazione dell'enunciato si può trovare in [2].

1.3 Misure di Hausdorff

Le superfici $(n-1)$-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ sono tutte trascurabili per la misura di Lebesgue. Abbiamo quindi necessità di definire, in $\mathbb{R}^n$, una misura che abbia senso per insiemi di "dimensione inferiore". La risposta a questo problema è costituita dalle cosiddette misure di Hausdorff. Tra i diversi modi di definire tali misure, sceglieremo quello tale per cui la misura di Hausdorff

n-dimensionale coinciderà con la tradizionale misura di Lebesgue. In questa maniera, tra l'altro, avremmo assicurata la coincidenza con queste nuove misure di insiemi di dimensione inferiore, con i concetti di lunghezza, superficie, volume, che si possono definire per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ parametrizzabili con funzioni regolari.

La costruzione delle misure di Hausdorff avverrà attraverso un procedimento standard per costruire misure, detto di Carathéodory; una trattazione generale di questo procedimento si può trovare in [3].

Definizione 1.5. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, il *diametro* di E è il numero (eventualmente infinito)

$$\operatorname{diam} E = \begin{cases} 0 & \text{se } E = \emptyset \\ \sup\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione 1.6. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, e siano k, $\varepsilon \geqslant 0$. Definiamo

$$H^*_{k,\varepsilon}(E) = \omega_k \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{\operatorname{diam} F_i}{2}\right)^k : F_i \text{ aperti, } \operatorname{diam} F_i < \varepsilon,\ E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \right\}$$

con ω_k la misura di Lebesgue dalla palla unitaria di $\mathbb{R}^k$, ovvero

$$\omega_k = m_k(B(0,1)) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} \ .$$

$H^*_{k,\varepsilon}$ è una misura esterna.

Definizione 1.7. La *misura esterna k-dimensionale di Hausdorff* H^*_k è data da

$$H^*_k(E) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} H^*_{k,\varepsilon}(E) = \sup_{\varepsilon>0} H^*_{k,\varepsilon}(E) \ .$$

Proposizione 1.8. *I Boreliani sono misurabili secondo la misura di Hausdorff.*

In tal caso, come al solito, indichiamo la *misura di Hausdorff k-dimensionale* con H_k.

Osservazione 1.9. Il diametro di un insieme E è chiaramente invariante per traslazioni e per isometrie lineari. Dunque, altrettanto lo è la misura di Hausdorff H_k.

Inoltre, il diametro è omogeneo di grado 1 per omotetie (ovvero, per ogni $c > 0$, $\operatorname{diam}(cE) = c \operatorname{diam}(E)$,), e quindi la misura di Hausdorff H_k è omogenea di grado k per omotetie ($H_k(cE) = c^k H_k(E)$).

Vogliamo ora mostrare che la misura n-dimensionale di Hausdorff coincide con la tradizionale misura di Lebesgue n-dimensionale su $\mathbb{R}^n$. Dal momento che una misura definita sui Boreliani e invariante per roto-traslazioni è un multiplo della misura di Lebesgue, mostriamo che il fattore moltiplicativo è proprio 1. Per farlo, introduciamo un elementare lemma che ci permetterà di confrontare le due misure.

Lemma 1.10 (Disuguaglianza isodiametrica)**.** *Per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \neq \emptyset$, misurabile secondo Lebesgue, si ha*

$$m_n(E) \leqslant \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} E}{2}\right)^n \tag{1.3}$$

Rimandiamo la dimostrazione della disuguaglianza isodiametrica, e vediamo come questa ci permette di dimostrare l'uguaglianza tra H_n e m_n in $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.11. *Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue, allora*

$$H_n(E) = m_n(E) \ .$$

Dimostrazione. Sia $C_0 = [0,1[^n$, $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ positivo tale che $\frac{\sqrt{n}}{N} < \varepsilon$. Ricopriamo C_0 con una famiglia di N^n cubi della forma

$$c_r = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{r_i - 1}{N}, \frac{r_i}{N}\right[\qquad \text{con } r_i \in \{1 \dots N\} \quad r = (r_1 \dots r_n) \ .$$

Ovviamente $c_r \subset C_o$. Inoltre $C_o \subset \bigcup_r c_r$, e $\operatorname{diam} c_r = \frac{\sqrt{n}}{N} < \varepsilon$, quindi

$$H^*_{n,\varepsilon}(C_o) \leqslant \omega_n \sum_r 2^{-n} (\operatorname{diam} c_r)^n = 2^{-n}\omega_n \sum_r \left(\frac{\sqrt{n}}{N}\right)^n = 2^{-n}\omega_n n^{\frac{n}{2}} < \infty$$

e quindi, passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$

$$H_n(C_o) \leqslant 2^{-n}\omega_n n^{\frac{n}{2}} < \infty \ .$$

Sia dunque $\beta_n = H_n(C_o)$; per quanto detto, $H_n(E) = \beta_n m_n(E)$.

Mostriamo che $\beta_n \geqslant 1$. Per ogni $\{F_i\}$ famiglia numerabile di aperti che ricoprono C_0, si ha, per il lemma 1.10,

$$1 = m_n(C_0) \leqslant \sum_i m_n(F_i) \leqslant \omega_n \sum_i \left(\frac{\operatorname{diam} F_i}{2}\right)^n \ .$$

Dunque $H_{k,\varepsilon}(C_0) \geqslant 1$, e quindi $\beta_n \geqslant 1$.

Mostriamo che $\beta_n \leqslant 1$. Sia $\{F_i\}$ una successione di sfere disgiunte tali che $\operatorname{diam} F_i < \varepsilon$, e supponiamo che ricoprano C_0 a meno di un insieme trascurabile secondo Lebesgue, ovvero

$$m_n(C_0 \setminus \cup_i F_i) = 0$$

(tale successione esiste per il teorema di ricoprimento di Vitali).

Dunque anche $H_n(C_0 \setminus \cup_i F_i) = 0$.

Dato che le F_i sono sfere, sappiamo calcolare la loro misura di Lebesgue:

$$m_n(F_i) = \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} F_i}{2} \right)^n .$$

Infine si ha

$$H_{n,\varepsilon}(C_0) \leqslant \sum_i \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} F_i}{2} \right)^n = \sum_i m_n(F_i) = m_n(C_0) = 1$$

e passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene la tesi. □

Affrontiamo ora la dimostrazione della disuguaglianza isodiametrica. Iniziamo col dimostrarla nel caso $n = 1$.

Proposizione 1.12. *Se $E \subseteq \mathbb{R}$, allora*

$$m_1(E) \leqslant \operatorname{diam} E .$$

Dimostrazione. Osserviamo che se $C \subseteq \mathbb{R}$ è connesso, allora è evidente che

$$\operatorname{diam} C = \sup C - \inf C = m_1(C) .$$

Se invece $A \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile secondo Lebesgue, ma non connesso, allora è unione disgiunta di componenti connesse. Per la σ-additività della misura di Lebesgue, al più un insieme numerabile di essi hanno misura positiva. Dunque

$$A = N \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \right) \quad C_i \text{ connesso}, \quad m_1(C_i) > 0\,, \quad m_1(N) = 0\,;$$

$$m_1(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m_1(C_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{diam} C_i .$$

Se $m_1(A) = \infty$, allora A non è limitato, e quindi $\operatorname{diam} A = \infty$. Altrimenti

$$\operatorname{diam} A \geqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{diam} C_i$$

e quindi

$$m_1(A) \leqslant \operatorname{diam} A .$$

□

Si osservi che questo implica che $H_1 = m_1$ in $\mathbb{R}$.

È possibile dimostrare la disuguaglianza isodiametrica per $n > 1$ grazie alla *simmetrizzazione di Steiner*.

Definizione 1.13. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$, definiamo la *simmetrizzazione di Steiner* di E rispetto all'iperpiano $P_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$ come l'insieme

$$S_i(E) = \bigcup_{\substack{\mathbf{v}\in P_i \\ E\cap(L_i+\mathbf{v})\neq\emptyset}} = \left\{\mathbf{v} + te_i : |t| \leqslant \frac{1}{2}H_1(E \cap (L_i + \mathbf{v}))\right\} ,$$

dove abbiamo indicato con e_i l'i-simo vettore della base canonica, e con $L_i+\mathbf{v}$ lo spazio affine generato da e_i e centrato in $\mathbf{v}$.

Essenzialmente stiamo "affettando" l'insieme E perpendicolarmente a P_i, e aggiungendo a $S_i(E)$ un segmento, perpendicolare e simmetrico a P_i, di lunghezza pari alla misura delle "fette". Dalla definizione risulta evidente che $S_i(E)$ è simmetrico rispetto a P_i.

Riassumiamo ora alcune interessanti proprietà della simmetrizzazione di Steiner.

Lemma 1.14. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e sia $S_i(E)$ il suo simmetrizzato di Steiner rispetto a P_i. Allora*

1. $\operatorname{diam} S_i(E) \leqslant \operatorname{diam}(E)$.
2. *Se E è misurabile, anche $S_i(E)$ lo è e vale $m_n(S_i(E)) = m_n(E)$.*

Dimostrazione.

1. Siano $(\mathbf{v}, t)$, $(\mathbf{w}, s) \in S_i(E)$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in L_i$, e mostriamo che

$$|(\mathbf{v}, t) - (\mathbf{w}, s)| \leqslant \operatorname{diam} E\,.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} |(\mathbf{v}, t) - (\mathbf{w}, s)|^2 &\leqslant \left(\frac{l(\mathbf{v}) + l(\mathbf{w})}{2}\right)^2 + |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\substack{\mathbf{p}\in E\cap(L_i+\mathbf{v}) \\ \mathbf{q}\in E\cap(L_i+\mathbf{w})}} |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 \leqslant (\operatorname{diam} E)^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $l(\mathbf{y}) = H_1(E \cap (L_i + \mathbf{y}))$.

2. Applichiamo il teorema di Fubini-Tonelli

$$m_n(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \, \mathrm{d}m_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{d}\mathbf{v} \int_{L_i+\mathbf{v}} \chi_E \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} H_1(E \cap (L_i + \mathbf{v})) \, \mathrm{d}\mathbf{v} = m_n(S_i(E))$$

□

Grazie al lemma 1.14, possiamo dare una dimostrazione della disuguaglianza isodiametrica.

Dimostrazione lemma 1.10. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e non vuoto. Consideriamo l'insieme

$$E^\star = (S_n \circ S_{n-1} \circ \cdots \circ S_1)(E)\,.$$

$E^\star$ è chiaramente simmetrico rispetto l'origine, e dunque se $\mathbf{x} \in E^\star$, anche $-\mathbf{x} \in E^\star$. Quindi $\operatorname{diam} E^\star \geqslant 2\,|x|$, ovvero $|x| \leqslant \frac{\operatorname{diam} E^\star}{2}$. Per l'arbitrarietà di $\mathbf{x}$, si ha che $E^\star$ è contenuto nella palla di centro 0 e raggio $\frac{\operatorname{diam} E^\star}{2}$, e quindi

$$m_n(E) = m_n(E^\star) \leqslant m_n\left(B(0, \frac{\operatorname{diam} E^\star}{2})\right) = \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} E^\star}{2}\right)^n \leqslant \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam} E}{2}\right)^n .$$

□

1.4 Lemma di Sard

Definizione 1.15. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. L'insieme dei punti in cui si annulla il gradiente di f

$$K_1 = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è detto *insieme critico di f*.

Anche nel caso in cui f sia molto regolare, il suo insieme critico può essere non trascurabile (nel senso della misura di Lebesgue). Se però f è sufficientemente regolare, l'immagine di K_1 tramite f (ovvero l'insieme dei *valori critici*) ha misura nulla. Questo risultato va sotto il nome di lemma di Sard, che lo dimostrò in [6].

Teorema 1.16 (lemma di Sard)**.** *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $f \in C^n(\Omega)$, allora $m_1(f(K_1)) = 0$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdere di generalità che Ω sia limitato. Infatti, supponiamo di aver dimostrato la tesi per gli insiemi limitati, e per ogni k intero consideriamo f ristretta all'insieme $\Omega_k = \Omega \cap B(0, k)$. Chiamiamo E_k l'insieme critico di f ristretta a Ω_k: per il teorema $m_n(E_k) = 0$ per ogni k. E_k è una successione crescente di insiemi trascurabili, dunque $K_1 = \cup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ è trascurabile.

Dimostriamo dunque il teorema per Ω limitato.

Definiamo

$$K_n = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \ldots, \nabla_n f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

l'insieme dei punti su cui si annullano tutte le derivate di ordine minore o uguale a n. Mostriamo innanzitutto che $m_1(f(K_n)) = 0$. Preso $E \subset \Omega$ definiamo

$$\operatorname*{osc}_E f = \sup_E f - \inf_E f$$

Se $\mathbf{x} \in K_n$, allora in un intorno di $\mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{h}|^n)$$

e quindi

$$\lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{osc}_{B(\mathbf{x},r)} f}{r^n} = 0$$

Sia $\varepsilon > 0$ e per ogni $\mathbf{x} \in K_n$ sia $r_{\mathbf{x}} > 0$ tale che $B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset \Omega$ e

$$\frac{\operatorname{osc}_{B(\mathbf{x},r)} f}{r^n} < \varepsilon \quad \forall r \leqslant r_{\mathbf{x}}$$

Per ogni $t \in f(K_n)$ sia $\mathbf{x}(t) \in f^{-1}(t) \cap K_n$, e consideriamo gli intervalli della forma $(t - \delta, t + \delta)$, per ogni $\delta < \varepsilon r^n_{x(t)}$. La famiglia

$$\big\{(t - \delta, t + \delta)\big\}_{t \in f(K_n),\, \delta < \varepsilon r^n_{\mathbf{x}(t)}}$$

è un ricoprimento di $f(K_n)$ nel senso di Vitali: per il teorema 1.4, possiamo scegliere una sotto-famiglia al più numerabile $\{i_k\}$ di intervalli che ricoprono $f(K_n)$ a meno di un insieme di misura nulla. Siano

$$i_m = (t_m - \delta_m, t_m + \delta_m)$$

e siano $\mathbf{x}_m \in f^{-1}(t_m) \cap K_n$. Dato che $\delta_m < \varepsilon r^n_{\mathbf{x}_m}$, $(\frac{\delta_m}{\varepsilon})^{\frac{1}{n}} < r_{\mathbf{x}_m}$ e quindi, detta

$$B_m = B\left(\mathbf{x}_m, \left(\frac{\delta_m}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}\right),$$

si ha

$$\operatorname*{osc}_{B_m} f < \varepsilon \left[\left(\frac{\delta_m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n = \delta_m \ .$$

Dunque

$$B_m \subset f^{-1}(i_m)$$

e di conseguenza

$$m_n(f^{-1}(i_m)) \geqslant \omega_n \frac{\delta_m}{\varepsilon} \ .$$

Dato che $\{i_k\}$ sono disgiunti, lo sono anche le loro controimmagini, e quindi

$$m_1(f(K_n)) = \sum_k m_1(i_k) = 2 \sum_k \delta_k \leqslant 2 \frac{\varepsilon}{\omega_n} \sum_k m_n(f^{-1}(i_m)) \leqslant 2 \frac{\varepsilon}{\omega_n} m_n(\Omega)$$

e quindi per l'arbitrarietà di ε, $m_1(f(K_n)) = 0$.

Dimostriamo quindi la tesi per induzione sulla dimensione n dello spazio $\mathbb{R}^n$ su cui è definita f. Abbiamo dimostrato il teorema nel caso $n = 1$: difatti, in tal caso, $K_n = K_1$ è proprio l'insieme critico di f. Supponiamo quindi che il teorema sia vero per ogni funzione C^{n-1} definita su $\mathbb{R}^{n-1}$. Dimostriamo che ciò implica la tesi per ogni funzione C^n definita su $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo l'insieme $K_1 \setminus K_n$. Per ogni $\mathbf{x} \in K_1 \setminus K_n$, esiste un multi-indice α, con $|\alpha| < n$, ed un intero $i \leqslant n$ tali che

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) = 0 \,, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha f \right)(\mathbf{x}) \neq 0 \ .$$

Sia $H(\alpha, i) \subset \Omega$ l'insieme dei punti $\mathbf{x}$ per cui vale la relazione precedente. Chiaramente al variare di α e i l'unione di questi insiemi è tutto $K_1 \setminus K_n$. Se dimostriamo che le loro immagini attraverso f hanno tutte misura nulla, avendo già dimostrato che $m_1(f(K_n)) = 0$, otteniamo la tesi.

Supponiamo, senza perdita di generalità, che $i = n$, e poniamo $g = D^\alpha f \in C^m(\Omega)$, con $m = n - \max_i \alpha_i$, $1 \leqslant m < n$. Dunque, su $H = H(\alpha, n)$ si ha che

$$g(\mathbf{x}) = 0 \,, \quad \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \neq 0 \ .$$

Dunque, per il teorema della funzione implicita, ogni $\mathbf{x}_0 \in H$ ha un intorno U tale che l'insieme $U \cap \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$ è della forma $\{(\mathbf{y}, \varphi(\mathbf{y}))\}$, con $\mathbf{y}$ appartenente ad un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$ e φ funzione definita su tale aperto di classe C^m a valori in $\mathbb{R}$.

Consideriamo per ogni $\mathbf{x}_0 \in H$ un sistema fondamentale di intorni composto intersecando U con una successione decrescente di palle di raggio tendente a zero: la famiglia di tutti gli intorni al variare di $\mathbf{x}_0$ forma un ricoprimento nel senso di Vitali di H. Per il teorema di Vitali 1.4, possiamo estrarre una famiglia al più numerabile $\{U_k\}$ che ricopre H a meno di un insieme trascurabile.

Per ogni k, definiamo

$$h(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \varphi(\mathbf{y})) \quad \text{con } (\mathbf{y}, \varphi(\mathbf{y})) = \mathbf{x} \in H \cap U_k \ .$$

Sia π la proiezione di $\mathbb{R}^n$ sul piano $\{x_n = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \ ;$$

si ha quindi che $f|_{H \cap U_k} = h \circ \pi|_{H \cap U_k}$. Sia $P = \pi(H \cap U_k)$. Allora per $\mathbf{y} \in P$ si ha che $\nabla h(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, e quindi per ipotesi induttiva $m_1(h(P)) = 0$.

Ma $h(P) = f(H \cap U_k)$, e quindi dato che $m_1(f(H \cap U_k)) = 0$ per ogni k si ha che $m_1(f(H)) = 0$, da cui la tesi. □

Le ipotesi del teorema 1.16 non possono essere indebolite, come mostra il seguente esempio, proposto da Sard nel suo articolo ([6]).

Esempio 1.17. Sia $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{n-1}, tale che esiste un arco in $\mathbb{R}^n$, chiuso e iniettivo, formato da punti critici per w, e tale che w assume tutti i valori tra 0 e 1 lungo tale arco (una siffatta funzione esiste; H. Whitney ne mostra la costruzione in [7]).

Allora l'immagine di K_1 di w ha misura maggiore o uguale ad 1, dato che contiene l'intero intervallo $(0, 1)$.

Corollario 1.18. *Se $f \in C^m(\Omega)$ (rispettivamente, $f \in C_0^m(\Omega)$), con $n \leqslant m \leqslant \infty$, allora per quasi ogni t gli insiemi $\mathscr{E}_t = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = t\} = f^{-1}(t)$ e $\mathscr{N}_t = \{\mathbf{x} : |f(\mathbf{x})| = t\}$ sono varietà C^m (rispettivamente, C^m compatte).*

Dimostrazione. Sia K_1 l'insieme critico di f, e sia $t \in \mathbb{R} \setminus f(K_1)$. Per costruzione, $K_1 \cap \mathscr{E}_t = \emptyset$, e quindi per ogni $\mathbf{x} \in \mathscr{E}_t$, $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Per il teorema della funzione implicita, E_t è localmente diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$, ed essendo f di classe C^m, il diffeomorfismo è di classe C^m.

Se f ha supporto compatto, $\mathscr{E}_t$ è contenuto in $\operatorname{Supp} f$ per $t \neq 0$.

Per $\mathscr{N}_t$, si osservi che $\mathscr{N}_t = \mathscr{E}_t \overset{\circ}{\cup} \mathscr{E}_{-t}$. □

2 Spazi i Sobolev

In questa sezione presenteremo degli spazi di funzioni che generalizzano gli spazi $L^p(\Omega)$. Vogliamo studiare le proprietà delle funzioni che siano non solo integrabili per un certo ordine, ma le cui derivate siano a loro volta integrabili.

Per prima cosa dovremo ridefinire il concetto di derivata, per estenderlo a funzioni (o meglio, a classi di funzioni) di $L^p(\Omega)$. Questo verrà fatto in due modi diversi (*derivate deboli* e *derivate forti*), e vedremo che sotto certe condizioni su Ω questi due concetti coincideranno.

2.1 Derivate deboli e spazi $W^{m,p}$

Per le funzioni $u \in L^1_{loc}$ è possibile definire un concetto analogo a quello di derivata, la derivata debole:

Definizione 2.1. $u \in L^1_{loc}$ ammette *derivata debole di ordine* α, con α multi-indice, se esiste una funzione $u^\alpha \in L^1_{loc}$ tale che

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x} \,. \tag{2.1}$$

Si vede che la richiesta che viene fatta è che la derivata debole verifichi la relazione di integrazione per parti.

La definizione di derivata debole è in realtà un caso particolare di un concetto più generale che è quello di derivata di una distribuzione. Per questo motivo le derivate deboli vengono anche chiamate *derivate distribuzionali* o *derivate nel senso delle distribuzioni.*

Osservazione 2.2. Se $u \in C^m(\Omega)$, allora è evidente che $u^\alpha = D^\alpha u$ per $|\alpha| \leqslant m$.

Proposizione 2.3. *Se la derivata debole di u di ordine α esiste, essa è unica.*

Dimostrazione. Siano u^α e v^α due derivate deboli di ordine α di u. Allora, per definizione

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \int_\Omega (u^\alpha - v^\alpha)\varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \left(\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right) = 0 \,.$$

Dimostriamo che ciò implica che $f = u^\alpha - v^\alpha$ è quasi ovunque nulla. Sia $\psi \in L^\infty(\Omega)$ a supporto compatto, e sia $\{\varphi_i\}_i$ una successione di funzioni in $\mathscr{D}$ che convergono a ψ ed equilimitate. Per il teorema di Lebesgue

$$0 = \int_\Omega f \varphi_i \, \mathrm{d}\mathbf{x} \to \int_\Omega f \psi \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

e quindi anche quest'ultimo integrale è zero.

Sia ora

$$\psi_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\mathbf{x}| > r \text{ o } f(\mathbf{x}) = 0 \\ \frac{|f(\mathbf{x})|}{f(\mathbf{x})} & \text{se } |\mathbf{x}| \leqslant r \text{ e } f(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} .$$

ψ_r appartiene a L^∞ ed ha supporto contenuto in $B(0, r)$, quindi

$$0 = \int_\Omega f(\mathbf{x})\psi_r(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{|\mathbf{x}|\leqslant r} |f(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x} .$$

Dall'arbitrarietà di r segue che $f(\mathbf{x})$ è nulla quasi ovunque, e che quindi $u^\alpha = v^\alpha$. □

Dalla linearità dell'integrale, è evidente che la proprietà di avere derivata debole di un certo ordine è stabile per le operazioni di spazio vettoriale.

Osservazione 2.4. L'operatore $u \to u^\alpha$ è lineare.

Definizione 2.5. Lo *spazio di Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni in $L^p(\Omega)$ che ammettono derivata debole in $L^p(\Omega)$ fino all'ordine m, ovvero

$$\forall\alpha \text{ tale che } |\alpha| \leqslant m\,, \exists u^\alpha \text{ derivata debole di } u, \text{ e } u^\alpha \in L^p(\Omega) .$$

È possibile dotare $W^{m,p}(\Omega)$ di una norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \,\mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \tag{2.2}$$

dove abbiamo per comodità indicato con D^α la derivata debole di ordine α di u.

Osservazione 2.6. Ovviamente, $W^{m,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$. Inoltre, se $m = 0$, la norma (2.2) coincide con la norma p e $W^{0,p} = L^p$.

2.2 Derivate forti e spazi $H^{m,p}$

Consideriamo il sottospazio di $C^m(\Omega)$ delle funzioni che siano integrabili di ordine p e tali che siano integrabili dello stesso ordine anche tutte le derivate:

$$E^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty \right\} .$$

Tale spazio vettoriale, dotato della norma (2.2), non è completo.

Definizione 2.7. Lo *spazio di Sobolev* $H^{m,p}(\Omega)$ è il completamento dello spazio $E^{m,p}(\Omega)$ rispetto alla norma (2.2). La chiusura di $\mathscr{D}(\Omega) \subset E^{m,p}(\Omega)$ in $H^{m,p}(\Omega)$ si indica con $H_0^{m,p}(\Omega)$.

Com'è uso, caratterizzeremo $H^{m,p}$ come sottospazio di $L^p(\Omega)$, e non useremo mai la sua rappresentazione dei suoi elementi come successioni di Cauchy.

Osservazione 2.8. Dato che $E^{m,p}(\Omega)$ è contenuto in $L^p(\Omega)$ che è completo, si ha che $H^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Inoltre, se $m = 0$, $E^{0,p}(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$, e quindi il suo completamento coincide con $L^p(\Omega)$: $H^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

$H^{m,p}(\Omega)$ può essere definito direttamente come il sottospazio delle funzioni di $L^p(\Omega)$ che verificano una certa proprietà; precisamente

Definizione 2.9. Una funzione $u \in L^p(\Omega)$ ha *derivate forti* in $L^p(\Omega)$ fino all'ordine m se valgono le seguenti

- esiste una successione $\{u_k\} \subset E^{m,p}(\Omega)$ tale che $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$.
- per ogni α multi-indice tale che $|\alpha| \leqslant m$, la successione $\{D^\alpha u_k\}$ è di Cauchy in $L^p(\Omega)$.

Per ogni α come sopra, la funzione $u^\alpha = \lim_{k\to\infty} D^\alpha u_k \in L^p(\Omega)$ è detta *derivata forte di ordine* α di u.

A priori non è ovvio che questa sia una buona definizione, ovvero che la funzione u^α non dipenda dalla successione approssimante o, nel caso in cui u appartenga a più di uno spazio $L^p(\Omega)$, dallo spazio in cui si sta derivando. Mostriamo che u^α non dipende da questi due fattori grazie alla seguente

Proposizione 2.10. *Se $u \in L^p(\Omega)$ ha derivate forti in $L^p(\Omega)$ fino all'ordine m, allora ha derivate deboli in $L^p(\Omega)$ fino all'ordine m, e tali derivate coincidono.*

Dimostrazione. Sia $\{u_k\}$ la successione che approssima u e le sue derivate forti in $L^p(\Omega)$ (vedi definizione 2.9). Allora, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, si ha, integrando per parti,

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_k \, \mathrm{d}\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_k D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \alpha \text{ tale che } |\alpha| \leqslant m \ .$$

Passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene la tesi. □

Dunque, una funzione $u \in L^p(\Omega)$ ha derivate forti fino all'ordine m in $L^p(\Omega)$ se e solo se può essere approssimata da una successione in $E^{m,p}(\Omega)$ di Cauchy rispetto alla norma (2.2). Di conseguenza si ha

Proposizione 2.11. *Lo spazio $H^{m,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni di $L^p(\Omega)$ che ammettono derivate forti in $L^p(\Omega)$ fino all'ordine m.*

2.3 Completezza degli spazi di Sobolev

D'ora in poi indicheremo con $D^\alpha u$, per analogia con la derivata in senso tradizionale, anche la derivata debole u^α. Quando u possiederà anche derivate forti, queste come visto sopra coincideranno con le derivate deboli, e quindi useremo nuovamente lo stesso simbolo. Renderemo esplicito quando ci riferiremo a funzioni che possiedono derivate deboli ma non forti.

Per il teorema di completamento, $H^{m,p}(\Omega)$ è completo rispetto alla norma (2.2), e quindi è uno spazio di Banach. $H_0^{m,p}(\Omega)$ è chiuso (per definizione) in $H^{m,p}(\Omega)$ che è completo, e quindi è a sua volta uno spazio di Banach.

Non ci resta da dimostrare che anche $W^{m,p}(\Omega)$, dotato della norma (2.2), risulta essere completo, ovvero:

Proposizione 2.12. *$W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{u_k\}_k$ una successione di Cauchy in $W^{m,p}(\Omega)$. Per ogni α tale che $|\alpha| \leqslant m$, consideriamo la successione $\{D^\alpha u_k\}_k$.

Verifichiamo che $\{D^\alpha u_k\}_k$ è una successione di Cauchy in L^p:

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u_k - D^\alpha u_h\|_p^p &= \int_\Omega |D^\alpha u_k - D^\alpha u_h|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leqslant \sum_{|\beta|\leqslant m} \int_\Omega \left|D^\beta u_k - D^\beta u_h\right|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \|u_k - u_h\|_{m,p}^p\end{aligned}$$

Dunque, per la completezza di $L^p(\Omega)$, $D^\alpha u_k \to u^\alpha$ in $L^p(\Omega)$ e $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$.

Passando al limite per $k \to \infty$ nelle relazioni che definiscono le derivate deboli, si ha che u^α è proprio la derivata debole di ordine α di u, e dunque $\{u_k\}$ converge a u in $W^{m,p}$. □

Osservazione 2.13. Se $p = 2$, $H_0^{m,2}(\Omega)$, $H^{m,2}(\Omega)$ e $W^{m,2}(\Omega)$ sono spazi di Hilbert, ed il prodotto scalare è dato da

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, \mathrm{d}\mathbf{x} \ . \tag{2.3}$$

A volte sarà più semplice considerare, invece della norma (2.2), la seguente più semplice

$$\|u\|'_{m,p} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.4}$$

Proposizione 2.14. *Le norme* (2.2) *e* (2.4) *sono equivalenti.*

Dimostrazione.

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_p = \|u\|'_{m,p}$$

$$\|u\|'_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{h-1} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{h-1} \|u\|_{m,p}$$

dove $h = \sharp \{\alpha : |\alpha| \leqslant m\}$. □

2.4 Relazioni tra spazi di Sobolev

Per quanto dimostrato in precedenza, si ha che

$$H_0^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \tag{2.5}$$

e le immersioni sono continue.

Abbiamo anche verificato che se $m = 0$ gli spazi di Sobolev coincidono tra di loro e con $L^p(\Omega)$. Se $m \neq 0$ $W^{m,p}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$.

Esempio 2.15. Per ogni $1 \leqslant p < \infty$, consideriamo la seguente funzione, definita su $B = B(\mathbf{0}, 1)$

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-\alpha} \qquad \text{con } \max\left(0, \frac{n}{p} - 1\right) < \alpha < \frac{n}{p} \; .$$

Verifichiamo che f appartiene a $L^p(B)$, utilizzando le coordinate sferiche:

$$\int_B \frac{1}{|\mathbf{x}|^{\alpha p}} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \; = \; \int_\Sigma \mathrm{d}\omega \int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{\alpha p}} \, \mathrm{d}\rho \; = \; C \left[\rho^{n-\alpha p}\right]_0^1 \; < \; \infty \quad \text{per } n - \alpha p > 0$$

(con C opportuna costante), dove abbiamo indicato con (ρ, ω) le coordinate sferiche e $\omega \in \Sigma = [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$.

Al contrario qualsiasi sua derivata $D_i f$ non appartiene a L^p. Infatti, per $1 \leqslant i \leqslant n$

$$D_i f(\mathbf{x}) = -\alpha \, |\mathbf{x}|^{\alpha - 1} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} = -\alpha \, |\mathbf{x}|^{-\alpha-2} \, x_i \; .$$

Integriamo $D_i f$ e otteniamo

$$\int_B |D_i f(\mathbf{x})|^p \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Sigma \mathrm{d}\omega \int_0^1 \rho^{n-1}\alpha^p \left[\rho^{-\alpha-2}(\rho\omega_i)\right]^p \mathrm{d}\rho =$$

$$\int_\Sigma |\omega_i|^p \,\mathrm{d}\omega \cdot \alpha^p \int_0^1 \rho^{n-1-(\alpha+1)p}\,\mathrm{d}\rho =$$

$$C\left[\rho^{n-(\alpha+1)p}\right]_0^1 = \infty$$

$$\text{perché } n-(\alpha+1)p = \left[\left(\frac{n}{p}-1\right)-\alpha\right]p \leqslant 0\ .$$

Quindi $f \notin W^{1,p}(B)$.

In generale i tre spazi di Sobolev presentati non coincidono. È possibile fornire condizioni sulla regolarità del bordo di Ω affinché questo accada.

Mostriamo ora una interessante proprietà delle funzioni regolarizzate su $W^{m,p}$, che -vedremo- si comportano bene, nel senso che l'operazione di regolarizzazione e di derivazione commutano.

Definizione 2.16. Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, e sia $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che

$$\varphi \geqslant 0\,, \quad \operatorname{Supp}\varphi = B(0,1)\,, \quad \|\varphi\|_1 = 1\ .$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo la *regolarizzata di u* come

$$(J_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n}\int_\Omega \varphi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\ . \tag{2.6}$$

Ricordiamo alcune proprietà elementari delle funzioni regolarizzate:

1. $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, e se u è a supporto compatto, allora anche u_ε lo è.
2. se $u \in L^p(\Omega)$, allora $\|u_\varepsilon\|_p \leqslant \|u\|_p$ e $u_\varepsilon \to u$ in $L^p(\Omega)$ per $\varepsilon \to 0$.

Lemma 2.17. *Se $u \in L^p(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, con α multi-indice, allora*

$$(J_\varepsilon D^\alpha u)(\mathbf{x}) = D^\alpha(J_\varepsilon u)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} : dist(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \varepsilon\ . \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in \Omega$, $dist(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \varepsilon$. Il supporto di $\mathbf{y} \to \varphi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right)$ è contenuto in $B(\mathbf{x},\varepsilon)$, e quindi è compatto in Ω. Dunque si ha

$$
\begin{aligned}
(J_\varepsilon D^\alpha u)(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n}\int_\Omega \varphi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) D^\alpha u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \\
(-1)^{|\alpha|}\varepsilon^{-n}\int_\Omega D^\alpha_{\mathbf{y}}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right)\right] u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \\
(-1)^{2|\alpha|}\varepsilon^{-n}\int_\Omega D^\alpha_{\mathbf{x}}\left[\varphi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right)\right] u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \\
D^\alpha_{\mathbf{x}}\left[\varepsilon^{-n}\int_\Omega \varphi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\right) u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\right] = D^\alpha(J_\varepsilon u)(\mathbf{x}) \ ;
\end{aligned}
$$

dove abbiamo indicato con $D_{\mathbf{x}}$ e con $D_{\mathbf{y}}$ la derivazione rispetto alla variabile $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. $\square$

Corollario 2.18. *Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$, allora per ogni $\Omega_1 \subset \Omega$ tale che $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, si ha che $J_\varepsilon u \to u$ in $W^{m,p}(\Omega_1)$ per $\varepsilon \to 0$.*

Dato che le $J_\varepsilon u \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega) \subset E^{m,p}(\Omega)$, si ha che

$$
W^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega_1)\,.
$$

Le ipotesi non possono essere indebolite, poiché il lemma 2.17 vale solo per i punti che distano almeno $\varepsilon > 0$ dal bordo di Ω.

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ allora il lemma 2.17 vale per ogni $\mathbf{x}$ ($\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$), e quindi il corollario precedente diventa

Proposizione 2.19. $H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

In realtà vale più in generale la seguente proposizione, dovuta a Meyers e Serrin ([5]).

Proposizione 2.20. *$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ per ogni Ω e per $1 \leqslant p < \infty$.*

Verifichiamo ora che la classica formula di Leibniz sulle derivate di un prodotto si estende al caso in cui una delle due funzioni appartenga a $H^{m,p}$.

Proposizione 2.21. *Se $u \in H^{m,p}(\Omega)$ e $v \in E^{m,\infty}(\Omega)$, allora $vu \in H^{m,p}(\Omega)$ e vale la formula di Leibniz*

$$
D^\alpha(vu) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta}v)(D^\beta u) \quad \forall\alpha \,:\, |\alpha| \leqslant m\ . \tag{2.8}
$$

Dimostrazione. Sia u_k una successione in $E^{m,p}(\Omega)$ che tende a u in $H^{m,p}(\Omega)$. $vu_k \in C^m(\Omega)$ e per la formula di Leibniz classica

$$D^\alpha(vu_k) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta}v)(D^\beta u_k) \ .$$

Osserviamo che, per ogni α tale che $|\alpha| \leqslant m$

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta}v)(D^\beta u) - \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta}v)(D^\beta u_k) \right\|_p \leqslant \\ &\leqslant \|v\|_{m,\infty} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\|(D^\beta u - D^\beta u_k)\right\|_p \leqslant \\ &\leqslant 2^h \|v\|_{m,\infty} \|u - u_k\|_{m,p} \to 0 \quad \text{per } k \to \infty \end{aligned}$$

(con h opportuno) e che quindi

$$\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta}v)(D^\beta u_k) \to \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta}v)(D^\beta u) \quad \text{in } L^p(\Omega) \ .$$

Ponendo $\alpha = (0 \dots 0)$, abbiamo che $\{vu_k\} \subset L^p(\Omega)$ e quindi $\{vu_k\} \subset E^{m,p}(\Omega)$. Inoltre $vu_k \to vu$, e tutte le derivate di vu_k (fino all'ordine m) convergono in $L^p(\Omega)$. Quindi vu appartiene a $H^{m,p}(\Omega)$ e vale la formula di Leibniz. □

Di conseguenza abbiamo che

Proposizione 2.22. $H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = H_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Dimostriamo per prima cosa che le funzioni in $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto sono dense in $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Consideriamo una funzione $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\psi(\mathbf{x}) = 1 \text{ per } |\mathbf{x}| \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \psi(\mathbf{x}) = 0 \text{ per } |\mathbf{x}| \geqslant 2 \ ;$$

$$|\psi(\mathbf{x})| \leqslant 1 \ .$$

Sia $u \in H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Per la proposizione 2.21 $\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) u(x)$ appartiene a $H^{m,p}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e per la formula di Lebniz

$$D^\alpha \left[\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) u(\mathbf{x})\right] = \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[D^{\alpha-\beta}\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right)\right] (D^\beta u(\mathbf{x})) + \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) D^\alpha u$$

e quindi

$$D^\alpha \left[\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) u(\mathbf{x})\right] - D^\alpha u(\mathbf{x}) = \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[D^{\alpha-\beta}\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right)\right] (D^\beta u(\mathbf{x})) + \left[\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) - 1\right] D^\alpha u \ .$$

Passando in norma p

$$\left\| D^\alpha \left[\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) u(\mathbf{x})\right] - D^\alpha u(\mathbf{x})\right\|_p \leqslant$$

$$\sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\| D^{\alpha-\beta}\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) (D^\beta u(\mathbf{x}))\right\|_p + \left(\int_{|\mathbf{x}|>k} \left|\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) - 1\right|^p |D^\alpha u|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/p}$$

$$\leqslant \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\| D^{\alpha-\beta}\psi(\mathbf{x})\right\|_\infty \left\| D^\beta u(\mathbf{x})\right\|_p k^{-|\alpha-\beta|} + \left(\int_{|\mathbf{x}|>k} |D^\alpha u|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/p} .$$

Nell'ultimo membro della disuguaglianza, per $k \to \infty$, il primo termine tende a zero dato che $|\alpha - \beta| \geqslant 1$, mentre il secondo termine tende a zero perché si sta integrando sul dominio $\{|\mathbf{x}| > k\}$.

Dunque abbiamo provato che la successione $\left\{\psi\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) u(\mathbf{x})\right\}_k$, che per la proposizione 2.21 appartiene a $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, e ovviamente è formata da funzioni a supporto compatto, tende in $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ a u.

Dimostriamo ora che $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso nel sottospazio delle funzioni di $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto. Sia u un elemento di tale spazio, e sia $\Omega_1 \subset \operatorname{Supp} u$.

Per il corollario 2.18 $J_\varepsilon u \to u$ in $W^{m,p}(\Omega_1)$, ma $J_\varepsilon u$ appartiene a $H^{m,p}(\Omega_1)$ per il 2.17 e quindi convergono a u in $H^{m,p}(\Omega_1)$.

$J_\varepsilon u$ appartiene a $\mathscr{D}(\Omega_1)$ (dato che u ha supporto compatto), e quindi a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, che quindi risulta essere denso in $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Ma dato che la chiusura di $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ in $H^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ è $H^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)$, questi ultimi due spazi coincidono. □

Riassumiamo i risultati di questa sezione nel seguente

Corollario 2.23. $H^{m,p}_0(\mathbb{R}^n) = H^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Non è nota una proprietà necessaria e sufficiente su Ω affinché valga questa uguaglianza più in generale. Vari criteri sufficienti sempre meno restrittivi sono stati presentati, ma nessuno di questi si è provato essere necessario. Per completezza della trattazione, riportiamo un risultato che, pur non essendo il più restrittivo, è di immediata enunciazione e sufficientemente generale. Non dimostreremo questo risultato. Uno studio più completo delle classi di domini che verificano l'uguaglianza si può trovare in [4].

Teorema 2.24. *Se Ω è un dominio con la proprietà di Lipschitz forte, ovvero di classe $C^{0,1}$, allora i tre spazi di Sobolev coincidono*

$$H_0^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega) \ .$$

3 Sulla norma-1 del gradiente

3.1 Una rappresentazione dell'integrale di Lebesgue

Teorema 3.1. *Sia $(X, \mathscr{B}, \mu)$ uno spazio dotato di una misura non negativa, e sia $u : X \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa μ-misurabile. Allora*

$$\int_X u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) = \int_0^\infty \mu(\mathscr{M}_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)\,\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

dove

$$\mathscr{M}_t = \{x \in X : u(x) \geqslant t\} \qquad \mathscr{L}_t = \{x \in X : u(x) > t\} \ .$$

Dimostrazione. Premettiamo una semplice osservazione: dato che $u \geqslant 0$, si ha $\mathscr{M}_0 = X$, e quindi se X non ha misura finita, $t \to \mu(\mathscr{M}_t)$ assume valore ∞ in 0.

Per ogni $\varepsilon > 0$ però, se $\mu(\mathscr{M}_\varepsilon) = \infty$, allora, dato che $\{\mathscr{M}_t\}_t$ è una famiglia monotona decrescente di insiemi, si ha che $\mu(\mathscr{M}_t) = \infty$ per $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ e quindi

$$\int_X u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) \geqslant \int_{\mathscr{M}_\varepsilon} u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) \geqslant \varepsilon\mu(\mathscr{M}_\varepsilon) = \infty$$

$$\int_0^\infty \mu(\mathscr{M}_t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^\varepsilon \mu(\mathscr{M}_t)\,\mathrm{d}t = \infty$$

da cui la tesi.

Dunque, possiamo supporre che $\mu(\mathscr{M}_t) < \infty$ per ogni $t > 0$.

Supponiamo preliminarmente che $u(x)$ sia limitata, e sia $u(x) \leqslant M < \infty$. Suddividiamo l'intervallo $[0, M]$ in m sottointervalli di estremi $\{t_k\}_{k=0}^m$, $0 = t_0 < \cdots < t_m = M$. Dunque

$$X = \mathscr{M}_{t_m} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{m-1} \left(\mathscr{M}_{t_k} \setminus \mathscr{M}_{t_{k+1}} \right) \right)$$

e quindi

$$\int_X u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mathscr{M}_{t_k} \setminus \mathscr{M}_{t_{k+1}}} u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) + \int_{\mathscr{M}_{t_m}} u(x)\mu(\,\mathrm{d}x)$$

Per come abbiamo definito $\mathscr{M}_t$ si ha

$$\sum_{k=0}^{m-1} t_k\mu(\mathscr{M}_{t_k} \setminus \mathscr{M}_{t_{k+1}}) + t_m\mu(\mathscr{M}_{t_m}) \leqslant \int_X u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) \leqslant \\ \sum_{k=0}^{m-1} t_{k+1}\mu(\mathscr{M}_{t_k} \setminus \mathscr{M}_{t_{k+1}}) + t_m\mu(\mathscr{M}_{t_m}) \,.$$

Mostriamo che le somme di Riemann inferiore e superiore della funzione $t \to \mu(\mathscr{M}_t)$, relative alla partizione $t_0, \ldots, t_m$, rispettivamente

$$s = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})\mu(\mathscr{M}_{t_k})\,;$$
$$S = \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)\mu(\mathscr{M}_{t_k})\,;$$

soddisfano la disuguaglianza

$$s \leqslant \int_X u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) \leqslant S\,,$$

e che quindi, per l'arbitrarietà della partizione scelta, otteniamo la tesi nel caso della famiglia $\mathscr{M}_t$.

Utilizzando l'identità di Abel

$$\sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k-1})b_k = -a_0 b_0 + a_{m-1}b_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(b_k - b_{k+1})$$

si ha che, ponendo $a_k = t_k$ e $b_k = \mu(\mathscr{M}_{t_k}) = \mu(\mathscr{M}_{t_k} \setminus \mathscr{M}_{t_{k+1}}) + \mu(\mathscr{M}_{t_{k+1}})$

$$s = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})\mu(\mathscr{M}_{t_k}) = \sum_{k=1}^{m-1} (t_k - t_{k-1})\mu(\mathscr{M}_{t_k}) + (t_m - t_{m-1})\mu(\mathscr{M}_{t_m}) =$$
$$\sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k-1})b_k + (a_m - a_{m-1})b_m =$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k(b_k - b_{k+1}) - \underbrace{a_0 b_0}_{0} + a_{m-1}b_m - a_{m-1}b_m + a_m b_m =$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} t_k \mu(\mathscr{M}_{t_k} \setminus \mathscr{M}_{t_{k+1}}) + t_m \mu(\mathscr{M}_{t_m})$$
$$\leqslant \int_X u(x)\mu(\,\mathrm{d}x) \leqslant$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} t_{k+1} \mu(\mathscr{M}_{t_k} \setminus \mathscr{M}_{t_{k+1}}) + t_m \mu(\mathscr{M}_{t_m}) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1}(b_k - b_{k+1}) + a_m b_m =$$
$$a_1 b_0 - a_m b_m + a_m b_m + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k)b_k =$$
$$(a_1 - a_0)b_0 + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k)b_k =$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{k+1} - a_k)b_k = \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)\mu(\mathscr{M}_{t_k}) = S\,.$$

Sia ora u non limitata. Definiamo $u_k(x) = u(x) \wedge k$, e dunque $\{u_k(x)\}_{k \geqslant 1}$ è una sequenza non decrescente di funzioni limitate positive, che convergono puntualmente a $u(x)$. Dunque, per il teorema di Beppo Levi

$$\lim_{k \to \infty} \int_X u_k(x) \mu(\,\mathrm{d}x) = \int_X u(x) \mu(\,\mathrm{d}x)\,.$$

Per quanto già dimostrato,

$$\int_X u_k(x) \mu(\,\mathrm{d}x) = \int_0^k \mu(\mathscr{M}_t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Considerando che

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^k \mu(\mathscr{M}_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu(\mathscr{M}_t)\,\mathrm{d}t$$

otteniamo la tesi per $\mathscr{M}_t$.

Il caso $\mathscr{L}_t$ è perfettamente analogo, dato che non abbiamo usato in realtà il fatto che la condizione che definisce $\mathscr{M}_t$ sia chiusa. $\square$

Dimostriamo una semplice generalizzazione del teorema 3.1, che ci sarà utile in seguito.

Proposizione 3.2. *Sia* $(X, \mathscr{B}, \mu)$ *uno spazio dotato di una misura con segno* $\mu = \mu^+ - \mu^-$, *e sia* $u : X \to \mathbb{R}$ *una funzione* μ*-misurabile semi-integrabile rispetto a* $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ *(ovvero, almeno una tra parte positiva e parte negativa è integrabile, e dunque ha senso il simbolo di integrale). Allora*

$$\int_X u(x) \mu(\,\mathrm{d}x) = \int_0^\infty \mu(\{u \geqslant t\})\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 \mu(\{u \leqslant t\})\,\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Decomponiamo u nella sua parte positiva e negativa $u = u^+ - u^-$:

$$\int_X u\,\mathrm{d}\mu = \int_x (u^+ - u^-)\,\mathrm{d}(\mu^+ - \mu^-) =$$

$$\int_X u^+\,\mathrm{d}\mu^+ - \int_X u^-\,\mathrm{d}\mu^+ - \int_X u^+\,\mathrm{d}\mu^- + \int_X u^-\,\mathrm{d}\mu^-\ .$$

Per il teorema 3.1 si ha

$$\int_X u^+ \,\mathrm{d}\mu^+ = \int_0^\infty \mu^+(\{u^+ \geqslant t\})\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu^+(u \geqslant t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_X u^- \,\mathrm{d}\mu^+ = \int_0^\infty \mu^+(\{u^- \geqslant t\})\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 \mu^+(\{u \leqslant t\})\,\mathrm{d}t$$

$$\int_X u^+ \,\mathrm{d}\mu^- = \int_0^\infty \mu^-(\{u^+ \geqslant t\})\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu^-(u \geqslant t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_X u^- \,\mathrm{d}\mu^- = \int_0^\infty \mu^-(\{u^- \geqslant t\})\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 \mu^-(\{u \leqslant t\})\,\mathrm{d}t$$

da cui, rimettendo assieme i pezzi, la tesi. □

3.2 Il gradiente e gli insiemi di livello

Dimostriamo ora la relazione che intercorre tra la norma-1 del gradiente di una funzione in $E^{1,1}$ e l'integrale della misura dei suoi insiemi di livello, dovuta a Fleming e Rishel.

Proposizione 3.3 (Formula di coarea di Fleming-Rishel)**.**
Sia $u \in E^{1,1}(\Omega)$ tale che gli insiemi di livello.

$$\mathscr{N}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| = t\}$$

siano di classe C^1 per quasi ogni t (per esempio, questo è vero per il corollario 1.18 se u è almeno di classe C^n). Allora

$$\|\nabla u\|_1 = \int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x})| \;\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^\infty H_{n-1}(\mathscr{N}_t) \;\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

dove H_{n-1} è la misura $(n-1)$-dimensionale di Hausdorff

Si osservi che il teorema vale anche in dimensione $n = 1$, dove la misura 0-dimensionale di Hausdorff è la misura contapunti.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{w} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione vettoriale di classe C_0^∞. Consideriamo l'integrale

$$\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \nabla u \,\mathrm{d}\mathbf{x} \;\; :$$

integriamo per parti e otteniamo

$$\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega u \operatorname{div} \mathbf{w} \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

dove ricordiamo che $\operatorname{div} \mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{w} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i}$. Consideriamo ora la misura con segno definita dalla densità $\operatorname{div} \mathbf{w}$: u è chiaramente misurabile rispetto a tale misura, ed è anche integrabile: possiamo dunque applicare la proposizione 3.2 e otteniamo

$$-\int_\Omega u \operatorname{div} \mathbf{w} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{u \geqslant t} \operatorname{div} \mathbf{w} \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}t \int_{u \leqslant t} \operatorname{div} \mathbf{w} \, \mathrm{d}\mathbf{x} =$$
$$-\int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{|u| \geqslant t} \operatorname{div} \mathbf{w} \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Per ipotesi, gli insiemi $\mathscr{N}_t$ sono di classe C^1 per quasi ogni t, e inoltre $\partial \{|u| \geqslant t\} = \mathscr{N}_t$. Inoltre, essendo $\mathbf{w}$ a supporto compatto, anche $\operatorname{div} \mathbf{w}$ lo è.

Possiamo applicare quindi il teorema della divergenza:

$$\int_{|u| \geqslant t} \operatorname{div} \mathbf{w} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{\mathscr{N}_t} \mathbf{w} \cdot \nu \, \mathrm{d}H_{n-1} \,,$$

dove $\nu(x)$ è il vettore unitario normale a $\{|u| \geqslant t\}$ diretto verso l'interno; quindi

$$\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \,.$$

Riassumendo,

$$\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{\mathscr{N}_t} \frac{\mathbf{w} \cdot \nabla u}{|\nabla u|} \, \mathrm{d}H_{n-1}$$

Sia ora $\{\mathbf{w}_i\} \subset C_0^\infty$ una successione di funzioni vettoriali che approssima in L^1 la funzione $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Per quanto dimostrato in precedenza, passando al limite per $i \to \infty$ e applicando il teorema di Lebesgue:

$$\int_\Omega \mathbf{w}_i \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\mathbf{x} \to \int_\Omega |\nabla u| \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$\int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{\mathscr{N}_t} \frac{\mathbf{w}_i \cdot \nabla u}{|\nabla u|} \, \mathrm{d}H_{n-1} \to \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{\mathscr{N}_t} 1 \, \mathrm{d}H_{n-1}$$

da cui la tesi.

□

Esiste una generalizzazione della formula di coarea, valida per funzioni in L^1. In tal caso però, i concetti coinvolti non sono quelli di norma del gradiente e misura $(n-1)$-dimensionale degli insiemi di livello, ma strumenti ancora più generali, che si riconducono ai primi sotto le ipotesi della nostra formulazione. A tal riguardo si veda [2].

4 Il teorema di equivalenza

In questa sezione utilizzeremo i risultati precedenti per dimostrare un'interessante equivalenza tra due importanti disuguaglianze: prima di entrare nei dettagli della dimostrazione, enunciamo i due teoremi di cui mostreremo in seguito l'equivalenza.

4.1 Disuguaglianza isoperimetrica

Per disuguaglianza isoperimetrica si intende genericamente una maggiorazione, valida per ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ appartenente ad una determinata classe, della misura n-dimensionale dell'insieme (o meglio, di una sua potenza), con la misura $(n-1)$-dimensionale (di Hausdorff) del suo bordo, a meno di una costante che dipende solo dalla dimensione n.

Di solito la classe di insiemi che si considera è data da condizioni alquanto blande sulla regolarità del bordo.

Teorema 4.1 (Disuguaglianza isoperimetrica)**.** *Per ogni $g \subset \Omega$ di classe $C^{0,1}$, si ha che*

$$m_n(g)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant n^{-1}\omega_n^{-1/n} H_{n-1}(\partial g) \ . \tag{4.1}$$

Si osservi che l'esponente $\frac{n-1}{n}$ è l'unico possibile, per ragioni di omogeneità.

4.2 Teorema di Sobolev

Quello che segue è un importante e classico risultato della teoria degli spazi di Sobolev.

Teorema 4.2 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Se Ω è di classe $C^{0,1}$, allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni $p < n$ esiste una costante C, dipendente solo da n e p, tale che*

$$\|u\|_{L^{p^\star}} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p} \tag{4.2}$$

dove $p^\star$ è detto coniugato di Sobolev *di p e vale*

$$\frac{1}{p^\star} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \qquad \textit{(dunque } p^\star > p\textit{)} \ . \tag{4.3}$$

Più in generale chiameremo *disuguaglianza di Sobolev* ogni maggiorazione, valida per una certa classe di funzioni, tra una norma p delle funzioni e una norma q di alcune derivate delle stesse.

Come conseguenza immediata abbiamo il seguente teorema di immersione:

Corollario 4.3 (Sobolev)**.** *Se $n > p$, allora esiste un'immersione continua* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$.

In particolare, se $p = 1$ ($p^\star = \frac{n}{n-1}$), $W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$.

4.3 Equivalenza fra le due disuguaglianze

Lemma 4.4. *Se $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ è una funzione decrescente non negativa, allora per ogni $p \geqslant 1$*

$$\int_0^\infty (f(x))^p \,\mathrm{d}(x^p) \leqslant \left(\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \right)^p .$$

Dimostrazione. Indichiamo con $F(x)$ la funzione integrale di f

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \ ,$$

e osserviamo che

$$\int_0^\infty f(x)^p \,\mathrm{d}x^p = p \int_0^\infty f(x)^p x^{p-1}\,\mathrm{d}x = p \int_0^\infty [x f(x)]^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Dal momento che f è decrescente, si ha che

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x f(x) \ ;$$

e quindi,

$$\int_0^\infty f(x)^p \,\mathrm{d}x^p \leqslant p \int_0^\infty \left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right]^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{d}F(x)^p = \left(\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \right)^p .$$

□

Dimostriamo ora il teorema centrale della tesi, che ci permetterà di mettere in relazione le due disuguaglianze viste sopra. In particolare il teorema che segue è formato da due parti, la prima della forma "se esiste una costante per una disuguaglianza isoperimetrica, allora ne esiste una anche per un'analoga disuguaglianza di Sobolev, ed esiste una maggiorazione tra le due costanti"; la seconda esprime il viceversa. Il teorema è attribuito a Maz'ja ([4]).

La classe di funzioni di cui ci occuperemo nelle disuguaglianze di Sobolev è ben definita, ed è semplicemente $\mathscr{D}(\Omega)$.

Chiariamo invece preliminarmente la classe di sottoinsiemi di Ω di cui si occupa la disuguaglianza isoperimetrica: data una misura μ su Ω, indichiamo con $\mathscr{G}$ il sottoinsieme delle parti di Ω, misurabili rispetto a μ, aventi chiusura compatta e contenuta in Ω, e aventi come frontiera varietà C^∞.

Teorema 4.5.

1. *Sia μ una misura su Ω e sia H_{n-1} la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale; se*
$$\sup_{g\in\mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} < \infty \tag{4.4}$$
dove $1 \leqslant q < \infty$ e $\mathscr{G}$ il sottoinsieme delle parti di Ω definito precedentemente.

   Allora esiste una costante C tale che per ogni $u \in \mathscr{D}(\Omega)$
$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \tag{4.5}$$
e C verifica
$$C \leqslant \sup_{g\in\mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)}$$

2. *Supponiamo che per ogni $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ la disuguaglianza (4.5) valga per una qualche costante C. Allora*
$$C \geqslant \sup_{g\in\mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)}$$

Dimostrazione. 1. Per il teorema 3.1
$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \mu\left\{|u|^q > t\right\} \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$\left(\int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t) \,\mathrm{d}t^q\right)^{\frac{1}{q}},$$
dove $\mathscr{L}_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > t\}$.

Dato che $\mu(\mathscr{L}_t)$ è una funzione decrescente non negativa, possiamo applicare il lemma 4.4. Inoltre per il corollario 1.18, per quasi ogni t, $\mathscr{L}_t \in \mathscr{G}$, e quindi

$$\|u\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant \int_0^\infty \mu(\mathscr{L}_t)^{\frac{1}{q}} \,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{g\in\mathscr{G}} \frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \int_0^\infty H_{n-1}(\partial\mathscr{L}_t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Per la proposizione 3.3, l'ultimo integrale coincide con $\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$.

2. Sia g un insieme arbitrario in $\mathscr{G}$ e sia $d(\mathbf{x}) = dist(\mathbf{x}, g) = \inf_{\mathbf{y}\in g} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, $g_t = \{\mathbf{x} : d(\mathbf{x}) < t\}$. Osserviamo che per $t \to 0$, $\{g_t\}$ è una famiglia decrescente di insiemi, che tende a $\bar{g}$.

   Sia $\alpha(t)$ una funzione decrescente con supporto in $[0,1]$, che valga 1 in 0 e sia nulla per $t > \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, e che sia infinitamente derivabile su $(0,1)$. Definiamo $u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \alpha(d(\mathbf{x}))$, e chiaramente $u_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$. Applicando le ipotesi e la proposizione 3.3, si ha che

$$\|u_\varepsilon\|_{L^q(\Omega,\mu)} \leqslant C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} = C\int_0^1 H_{n-1}(\{|u_\varepsilon(\mathbf{x})| = t\})\,\mathrm{d}t$$

   Effettuiamo il cambiamento di variabile

$$t = \alpha(r)\,, \quad dt = \alpha'(r)\,\mathrm{d}r$$

   e otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 H_{n-1}(\{|u_\varepsilon(\mathbf{x})| = t\})\,\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\{\alpha(d(\mathbf{x})) = \alpha(r)\})\alpha'(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\{d(\mathbf{x}) = r\})\alpha'(r)\,\mathrm{d}r = \int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\partial g_r)\alpha'(r)\,\mathrm{d}r \ .\end{aligned}$$

   Osserviamo che

$$\int_0^\varepsilon \alpha'(t)\,\mathrm{d}t = \alpha(\varepsilon) - \alpha(0) = -1$$

   e che $\alpha'(t)$, tende (nel senso delle distribuzioni), per ε che tende a zero, alla delta di Dirac. Dato che $H_{n-1}(\partial g_t) \to H_{n-1}(\partial g)$ per $t \to 0$, allora passando al limite per $\varepsilon \to 0$ nell'integrale si ottiene

$$\int_\varepsilon^0 H_{n-1}(\partial g_t)\alpha'(t)\,\mathrm{d}t \to H_{n-1}(\partial g) \ ,$$

e quindi

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} H_{n-1}(\partial g)\,.$$

D'altra parte, dato che $u_\varepsilon|_g = 1$, si ha che

$$\int\limits_\Omega |u_\varepsilon|^q \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{g_\varepsilon} \alpha(d(\mathbf{x}))^q \,\mathrm{d}\mu(\mathbf{x}) \geqslant \int\limits_g \alpha(d(\mathbf{x}))^q \,\mathrm{d}\mu(\mathbf{x}) = \mu(g)$$

e quindi

$$\|u_\varepsilon\|_{L^q(\Omega,\mu)} \geqslant \mu(g)^{\frac{1}{q}}$$

Rimettendo tutto assieme, otteniamo che

$$\mu(g)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \to C H_{n-1}(\partial g)$$

e di conseguenza

$$\frac{\mu(g)^{\frac{1}{q}}}{H_{n-1}(\partial g)} \leqslant C\,;$$

quindi si ha la disuguaglianza cercata.

□

Corollario 4.6. *Dal teorema 4.5 e dalla disuguaglianza isoperimetrica* (4.1)*, segue che se* $n > 1$

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)} \leqslant n^{-1}\omega_n^{-1/n}\,\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}\ ,$$

e che la costante è la migliore possibile.

Si osservi che il precedente corollario implica per densità il teorema di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (4.2) nel caso $p = 1$, relativamente alle funzioni in $H_0^{1,1}(\Omega)$. Questo risultato si estende poi a $W^{1,1}(\Omega)$ grazie ai teoremi sulla coincidenza di tali spazi (il teorema 2.23 o il teorema 2.24).

Il ragionamento precedente non si può applicare nel caso $n = 1$: nonostante la disuguaglianza isoperimetrica continui a valere in tal caso (si riduce in effetti a dire che gli insiemi considerati hanno almeno 2 punti come frontiera), il teorema 4.5 non si può applicare, dato che il fattore all'esponente q viene richiesto essere finito (mentre in questo caso $\frac{1}{q} = \frac{n-1}{n} = 0$).

Del resto la disuguaglianza di Gagliardo-Niremberg nel caso $n = p = 1$ non vale: dovrebbe infatti verificarsi che

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \qquad \|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\,\|f'\|_1\ ;$$

il che è chiaramente falso, dato che, se $f \geqslant 0$,

$$\|f+c\|_\infty = \|f\|_\infty + c \qquad \left\|\frac{d}{dx}(f+c)\right\|_1 = \left\|\frac{d}{dx}f\right\|_1 \qquad \forall c \in \mathbb{R}^+ \ .$$

Vediamo ora una interessante proprietà del teorema di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev: il caso $p = 1$ (che abbiamo dimostrato) implica il caso $p > 1$.

Proposizione 4.7. *Se* $n > p \geqslant 1$

$$\forall u \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leqslant C\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

con un'opportuna constante C *dipendente solo da* n *e* p.

Dimostrazione. Sia $u \in \mathscr{D}(\Omega)$. Applichiamo il risultato del corollario 4.6 alla funzione $u' = |u|^{p(n-1)/(n-p)} \in \mathscr{D}(\Omega)$.

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{p(n-1)}{n-p}\frac{n}{n-1}}\ \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant n^{-1}\omega_n^{-1/n}\int_\Omega |\nabla u'|\ \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Riscriviamo il primo termine come segue

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{pn}{n-p}}\ \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{n-p}{pn}\frac{pn}{n-p}\frac{n-1}{n}} = \|u\|_{\frac{pn}{n-p}}^{\frac{p(n-1)}{n-p}} \ .$$

Occupiamoci ora del secondo termine: il gradiente di $|u|^{p(n-1)/(n-p)}$ si può scrivere nel seguente modo

$$\nabla u' = \frac{p(n-1)}{n-p}\,|u|^{\frac{p(n-1)}{n-p}-1}\,\frac{|u|}{u}\nabla u \ ,$$

e quindi

$$|\nabla u'| = \frac{p(n-1)}{n-p}\,|u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}\,|\nabla u| \ .$$

Sostituiamo questa formula nell'integrale ed otteniamo, applicando la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned}\frac{p(n-1)}{n(n-p)}\omega_n^{-1/n}\int_\Omega |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}\,|\nabla u|\ \mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \\ \leqslant \frac{p(n-1)}{n(n-p)}\omega_n^{-1/n}\left(\int_\Omega \left(|u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\ \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\ \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1/p} = \\ = \frac{p(n-1)}{n(n-p)}\omega_n^{-1/n}\,\|u\|_{\frac{np}{n-p}}^{\frac{n(p-1)}{n-p}}\,\|\nabla u\|_p \ .\end{aligned}$$

Ritornando alla disuguaglianza, e semplificando i termini $\|u\|_{\frac{np}{n-p}}$, si ottiene la tesi:

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \omega_n^{-1/n} \|\nabla u\|_p \ .$$

□

4.4 Un esempio: insiemi poligonali

La costante del corollario 4.6 è, come detto, la migliore possibile; è possibile però migliorarla restringendo la classe delle funzioni considerate. Presentiamo un semplice risultato, che mostra come il teorema 4.5 possa essere usato per dimostrare altri risultati analoghi al teorema di Sobolev.

Definizione 4.8. Un sottoinsieme limitato Ω_N di $\mathbb{R}^2$, è detto *poligono di N lati o N-agono*, con $N \geqslant 2$ se il suo bordo è formato da N segmenti consecutivi

$$\partial\Omega_N = \bigcup_{i=1}^{N} I_i \ ,$$

con I_i immagini tramite applicazioni lineari dell'intervallo $[0,1]$

$$\varphi_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_i([0,1]) = I_i \quad \varphi_i(1) = \varphi_{(i+1) mod N}(0) \quad \varphi_i \text{ lineare} \ .$$

Per gli N-agoni vale una disuguaglianza isoperimetrica con una costante migliore di quella classica. Questo risultato è attribuito a Sobolev.

Proposizione 4.9. *Se Ω_N è un N-agono, allora vale*

$$m_2(\Omega_N) \leqslant \frac{N}{4\tan(\frac{\pi}{N})} H_{n-1}(\partial\Omega_N)^2 \ .$$

Dato che la costante è crescente in funzione di N, la disuguaglianza vale con la stessa costante per poligoni con un numero di lati minore o uguale a N. Indichiamo con $\mathscr{G}_N$ l'insieme di tali poligoni:

$$\mathscr{G}_N = \left\{\Omega_k \subset \mathbb{R}^2 : \Omega_k \ k\text{-agono}, k \leqslant N\right\} \ .$$

Consideriamo ora la classe $\mathscr{P}_N$ delle funzioni definite su $\mathbb{R}^2$ e aventi supporto compatto, tali che i loro insiemi di livello sono per quasi ogni t poligoni con al più N lati.

Allora si può ottenere un risultato analogo a 4.6, replicando la dimostrazione di 4.5.

Proposizione 4.10. *Se $u \in P_N$, allora*

$$\|u\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{\tan\frac{\pi}{N}}} \|\nabla u\|_1 \ .$$

4.5 Dimostrazione del Teorema di Sobolev

Riportiamo ora una dimostrazione del Teorema di Sobolev nel caso $p = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$. Come già visto in precedenza, il caso $p > 1$ può essere dedotto da questo, mentre il teorema può essere generalizzato ad aperti Ω aventi proprietà di regolarità del bordo; per una dimostrazione per tali aperti si veda [1].

Introduciamo una piccola estensione della notazione multi-indice, che ci sarà utile per rendere più chiare le successive dimostrazioni.

Innanzitutto permettiamo alle componenti di un multi-indice di assumere anche il valore ∞.

Se $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ è un multi-indice, con un abuso di notazione indicheremo

$$\frac{1}{\mathbf{p}} = \left(\frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n}\right),$$

con la solita convenzione che se una delle componenti vale ∞, il suo reciproco è 0.

Inoltre, se $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ sono multi-indici, diremo che

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{q}}$$

se vale la seguente

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} \quad \text{per } 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

La notazione precedente si estende naturalmente alla somma di k multi-indici.

Introduciamo ora degli spazi, analoghi agli spazi L^p, il cui indice di integrazione però è diverso per ogni coordinata di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 4.11. Dato un multi-indice $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ con $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ per ogni i, ed una funzione misurabile u definita su $\mathbb{R}^n$, definiamo una norma $\mathbf{p}$, che indicheremo con $\|u\|_{\mathbf{p}}$, nel seguente modo: calcoliamo la norma p_1 di u considerata come funzione della sola prima componente; il risultato sarà dipendente dalle restanti $(x_2, \ldots, x_n)$; dunque ne calcoliamo la norma p_2 in funzione della componente x_2, e così via. Indicando con $\|\cdot\|_{L^{p_i}(dx_i)}$ la norma p_i calcolata in funzione della sola variabile x_i, possiamo scrivere

$$\|u\|_{\mathbf{p}} = \Big\| \cdots \Big\| \|u\|_{L^{p_1}(dx_1)} \Big\|_{L^{p_2}(dx_2)} \cdots \Big\|_{L^{p_n}(dx_n)} \tag{4.6}$$

Definizione 4.12. Indichiamo con $L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle classi di funzioni (a meno della relazione di coincidenza quasi ovunque) definite su $\mathbb{R}^n$ tali che $\|u\|_{\mathbf{p}} < \infty$.

È evidente dalla definizione che se $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$, allora $\|\cdot\|_{\mathbf{p}} = \|\cdot\|_p$ e $L^{\mathbf{p}} = L^p$.

$L^{\mathbf{p}}$ dotato della norma 4.6 è uno spazio di Banach. Non studieremo le proprietà di questi nuovi spazi, ma ci limiteremo ad enunciare una versione modificata della disuguaglianza di Hölder.

Proposizione 4.13 (Hölder)**.** *Siano* $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{q}$ *due multi-indici con* $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ *e* $1 \leqslant q_i \leqslant \infty$ *per* $1 \leqslant i \leqslant n$. *Se* $u \in L^{\mathbf{p}}$ *e* $v \in L^{\mathbf{q}}$, *allora* $uv \in L^{\mathbf{r}}$, *con*

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{q}},$$

ed inoltre vale la disuguaglianza di Hölder

$$\|uv\|_{\mathbf{r}} \leqslant \|u\|_{\mathbf{p}} \|v\|_{\mathbf{q}} . \tag{4.7}$$

La dimostrazione consiste semplicemente nell'applicare n volte la versione scalare della disuguaglianza di Hölder una variabile alla volta.

Iterando k volte la disuguaglianza precedente si ottiene il seguente corollario:

Corollario 4.14. *Sia* k *un intero, e per* $j = 1, \dots, k$ *sia* $u_j \in L^{\mathbf{p}_j}$. *Allora vale*

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} u_j \right\|_{\mathbf{r}} \leqslant \prod_{j=1}^{k} \|u_j\|_{\mathbf{p}_j} \quad \textit{dove } \frac{1}{\mathbf{r}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\mathbf{p}_j} . \tag{4.8}$$

Dimostriamo ora un lemma su cui si baserà la prova del teorema di Sobolev. Le notazioni che introdurremo saranno usate anche in seguito.

Lemma 4.15. *Sia* $n \geqslant 2$. *Per ogni* i *intero tra* 1 *e* n, *indichiamo con* E_i *l'iperpiano di* $\mathbb{R}^n$ *con coordinata* i*-sima pari a 0:*

$$E_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\} ,$$

e indichiamo con π_i *la proiezione ortogonale su* E_i. *Talvolta identificheremo* E_i *con* $\mathbb{R}^{n-1}$ *e quindi penseremo* π_i *come proiezione di* $\mathbb{R}^n$ *su* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Con $\hat{\mathbf{x}}_i$ *indicheremo il vettore di variabili* $(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n)$ *in cui abbiamo eliminato la* i*-sima componente. Indicheremo con* $d\hat{\mathbf{x}}_i$ *il prodotto* $dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n$ *privato della* i*-sima componente.*

Indicheremo, per $1 \leqslant i \leqslant n$, *con* $f_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$ *una funzione che non dipende dalla componente* x_i, *e appartenente a* $L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. *Allora la funzione*

$$F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ *e vale*

$$\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

Dimostrazione. Per $i = 1, \ldots, n$, definiamo $\mathbf{p}_i$ il multi-indice che ha tutte le componenti uguali a $n-1$, tranne la i-sima che è posta ∞. Di conseguenza

$$\frac{1}{\mathbf{p}_i} = \left(\frac{1}{n-1}, \ldots, \underbrace{0}_{i}, \ldots, \frac{1}{n-1} \right) .$$

Dunque, dato che, al variare dell'indice i, ogni componente assume il valore 0 una sola volta, abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathbf{p}_i} = \frac{1}{\mathbf{q}} \quad \text{con } \mathbf{q} = (1, \ldots, 1) .$$

Consideriamo f_i come funzione definita su $\mathbb{R}^n$ ponendola uguale a zero fuori da E_i. Dunque utilizzando la norma multi-indice abbiamo che

$$\|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \|f_i\|_{L^{\mathbf{p}_i}(\mathbb{R}^n)} ,$$

e quindi, applicando la disuguaglianza di Hölder (4.8)

$$\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|F\|_{L^{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{\mathbf{p}_i}(\mathbb{R}^n)} = \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} .$$

□

Abbiamo tutti gli strumenti necessari per dimostrare il teorema di Sobolev nel caso $p = 1$.

Teorema 4.16 (Sobolev)**.** *Se* $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$*, allora*

$$\|u\|_{n/(n-1)} \leqslant \|u\|_{1,1}$$

e quindi si ha l'immersione continua

$$W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n) .$$

Dimostrazione. Data $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, ricopriamo il supporto di u con una famiglia finita di cubi n-dimensionali (che d'ora in avanti chiameremo semplicemente cubi) di lato unitario, disgiunti ad eccezione del bordo (tale famiglia finita esiste perché $\operatorname{Supp} u$ è compatto). Indichiamo tale famiglia con $\{Q_j\}_{j\in M}$ (M insieme finito di indici); risulta evidente dunque che

$$u = \sum_{j\in M} u\chi_{Q_j} \, .$$

Poniamo $f_j = u\chi_{Q_j}$, e supponiamo di aver dimostrato il teorema per le funzioni con supporto contenuto in un cubo unitario:

$$\|f_j\|_{n/(n-1)} \leqslant \|f_j\|_{1,1} \, .$$

Allora la tesi segue anche per f. Infatti

$$\|u\|_{n/(n-1)} \leqslant \sum_{j\in M} \|f_j\|_{n/(n-1)} \leqslant \sum_{j\in M} \|f_j\|_{1,1} = \|u\|_{1,1} \, .$$

Prima di dimostrare il teorema per le funzioni a supporto in un cubo unitario, facciamo una semplice osservazione: se $f \in C^1([0,1])$, allora, per $t, t_0 \in [0,1]$,

$$|f(t_0)| \leqslant |f(t)| + \left| \int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \leqslant |f(t)| + \left| \int_{t_0}^{t} |f'(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \right| ;$$

integrando su $[0,1]$ rispetto a t

$$|f(t_0)| \leqslant \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)\, \mathrm{d}t = \|f\|_{W^{1,1}([0,1])} \quad \forall t_0 \in [0,1] \, .$$

Sia dunque $Q \subset \mathbb{R}^n$ un cubo unitario che contiene $\operatorname{Supp} u$. Dunque, applicando il precedente a u intesa come funzione della sola variabile x_1

$$|u(x)| \leqslant \Big(\|u\|_{L^1(dx_1)} + \|D_{x_1} u\|_{L^1(dx_1)} \Big) = \|u\|_{W^{1,1}(dx_1)} \, .$$

Il secondo termine della disuguaglianza sopra dipende dalle variabili $\hat{\mathbf{x}}_1 = (x_2, \dots, x_n)$; definiamo quindi

$$u_1(\hat{\mathbf{x}}_1) = \Big(\|u(\cdot, \hat{\mathbf{x}}_1)\|_{W^{1,1}(dx_1)} \Big)^{1/(n-1)} \geqslant 0 \, .$$

Chiaramente u_1 non dipende da x_1, ed inoltre si ha

$$|u(x)|^{1/(n-1)} \leqslant u_1(\hat{\mathbf{x}}_1) \quad \text{e}$$

$$\|u_1\|_{L^{n-1}}^{n-1} = \int\limits_{E_1} |u_1(\hat{\mathbf{x}}_1)|^{n-1} \,\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}_1 = \int\limits_{E_1} \left(\|u\|_{L^1(dx_1)} + \|D_{x_1} u\|_{L^1(dx_1)}\right) \mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}_1$$

$$= \int\limits_{E_1}\int\limits_{\mathbb{R}} |u| \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}_1 + \int\limits_{E_1}\int\limits_{\mathbb{R}} |D_{x_1} u| \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}_1 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u| \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$= \|u\|_{1,1} < \infty$$

Procedendo analogamente, per $2 \leqslant i \leqslant n$, otteniamo n funzioni u_i, indipendenti (rispettivamente) da x_i, e appartenenti a $L^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Possiamo dunque applicare il lemma 4.15, e otteniamo che la funzione

$$F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$$

è integrabile e vale

$$\|F\|_1 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{n-1} \,.$$

Ma osserviamo che

$$|u|^{\frac{n}{n-1}} = \prod_{i=1}^{n} |u|^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} u_i = F$$

e che quindi

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}} = \int\limits_{Q} |u(\mathbf{x})|^{\frac{n}{n-1}} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{Q} F(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} =$$

$$\|F\|_1 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|u\|_{1,1}^{\frac{1}{n-1}} = \left(\|u\|_{1,1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \,,$$

da cui la tesi. □

Riferimenti bibliografici

[1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Pure and applied mathematics, Elsevier Science, 2003.

[2] Luigi Ambrosio, *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle Superfici Minime*, Appunti dei corsi tenuti da docenti della Scuola, Scuola Normale Superiore, 1997.

[3] G. Anzelotti, M. Giaquinta, U. Massari, G. Modica, and L. Pepe, *Note sul Problema di Plateau*, Editrice Tecnico Scientifica, 1974.

[4] Vladimir G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, 1985.

[5] N. Meyers and J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964), 1055–1056.

[6] Arthur Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. (1942), no. 48, 883–890.

[7] H. Whitney, *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke Mathematical Journal **1** (1935), 514–517.

Ringraziamenti

in ordine strettamente casuale

Ai miei genitori, perché non saprei dire per chi è stata più dura.
Ai compagni y e z, per avermi fatto salire in alto.
Ai cacciatori di draghi, per avermi insegnato ad ucciderli.
A chi mi ha fatto da secondo, per avermi convinto ad andare da primo.
Al prof. Acquistapace, (anche) per un mazzetto di figurine.
A quel sistemista, per quella storia della lavagna.
A quel genovese, per quella storia della lavagna.
A chi si è passato un estate in aula 3.
A chi c'è stato, a chi non c'è stato, a chi c'è e a chi ci sarà.
Ai nerd e ai filosofi.
Ai gatti neri.
A chi mi ha ospitato in casa sua (e sono tanti).
A chi mi ha insegnato a smontare le cose.
A chi mi ha inseganto a rimontarle.

A quelli che hanno fatto strane smorfie quando mi chiedevano cosa studiassi.
A quelli che hanno provato a farsi raccontare la mia tesi.
A quelli che alla fine non l'hanno capita.

A chi ho dimenticato. A chi manca.
A chi non voglio ringraziare.